Zusammenfassung zum Thema Fehlerrechnung

Mathematischer Brückenkurs (A)
für PhysikerInnen und ChemikerInnen

WS 2018/2019

Messfehler
Jede physikalische Messung ist mit Fehlern behaftet. Wir unterscheiden zwei Arten von Fehlern:

- systematische Fehler, die z.B. durch fehlerhaft justierte Messapparaturen oder andere Unzulänglichkeiten des Messverfahrens entstehen,
- statistische Fehler, die durch zufällige Einflüsse auf einzelne Messungen entstehen.

Wenn eine Messung wiederholt wird, variieren die statistischen Fehler, die systematischen Fehler bleiben gleich. Im Folgenden behandeln wir nur die statistischen Fehler.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen
Wenn wir eine Messung beliebig oft wiederholen könnten, würden wir eine Streuung der Messwerte beobachten, bei der Werte in verschiedenen Intervallen verschieden häufig auftauchen.
Es gilt das Gesetz der großen Zahlen: Bei N-facher Messung einer zufällig verteilten Größe gilt für die relative Häufigkeit, mit der das Ergebnis E erzielt wird,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#(E)}{N} = P(E)$$

wobei $P(E)$ die Wahrscheinlichkeit von E ist.
Für kontinuierlich verteilte Größen gilt

$$P(x \in [a;b]) = \int_a^b p(y)\mathrm{d}y$$

mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung (Dichte) $p : \mathbb{R} \to [0;\infty)$, die $p(y) \geq 0$ und $\int_{-\infty}^{\infty} p(y)\mathrm{d}y = 1$ genügt.

Erwartungswert und Varianz
Bei N-facher Wiederholung einer Messung ist der mittlere Messwert

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$$

und nach dem Gesetz der großen Zahlen erwarten wir hierfür im Limes $N \to \infty$

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x$$

was den Erwartungswert definiert.
Als ein Maß für die mittlere Streuung der Ergebnisse um den Erwartungswert definieren wir ferner die Varianz

$$\Delta x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x\rangle)^2 p(x)\ \mathrm{d}x = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$$

Die Normalverteilung
Eine besonders wichtige Warscheinlichkeitsverteilung ist die sogenannte Normalverteilung (oder Gauss-Verteilung)

$$p_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2.
Ihre Bedeutung erklärt sich aus dem Zentralen Grenzwertsatz: Seien $x_1, \ldots, x_N$ unabhägig voneinander identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Dann ist im Limes $N \to \infty$ der Mittelwert $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$ normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $\frac{\sigma^2}{N}$.

Statistische Schätzer und Fehlerfortpflanzung
Für eine endliche Messreihe $x_1, \ldots, x_N$ nehmen wir an, dass die einzelnen Messwerte unabhängig voneinander identisch normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 sind, und schätzen die unbekannten Parameter μ und σ durch

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \tilde{\mu})^2}$$

Nach dem Zentralen Grenzwertsatz hat unser geschätzter Mittelwert einen mittleren Fehler von

$$\sigma_{\tilde{\mu}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \approx \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{N}}$$

Für den Fehler einer Funktion $f(x, y)$ von unabhängig voneinander fehlerbehafteten Größen x, y gilt das Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\sigma_{f(\tilde{\mu}_x,\tilde{\mu}_y)} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_{\tilde{\mu}_x}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_{\tilde{\mu}_y}^2}$$