

Gruppentheorie in der Physik I und II  
Vorlesungsskript WS 2009/2010 und SS 2010

<http://wwwkph.kph.uni-mainz.de/T/80.php>

Stefan Scherer  
Institut für Kernphysik, Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Juli 2010



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundbegriffe und Beispiele</b>	<b>1</b>
1.1	Definition von Grundbegriffen . . . . .	1
1.2	Beispiele . . . . .	4
1.3	Weitere Begriffe mit Beispielen . . . . .	20
1.4	Homomorphismen . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Darstellungen und Realisierungen von Gruppen</b>	<b>43</b>
2.1	Definition von Darstellungen mit Beispielen . . . . .	43
2.2	Äquivalente Darstellungen, reduzible und irreduzible Darstellungen . . . . .	49
2.3	Lemmata von Schur, Orthogonalitätsrelationen und Kriterien für Irreduzibilität . . . . .	61
2.4	Konstruktion einer Charaktertabelle . . . . .	70
2.5	Clebsch-Gordan-Zerlegung am Beispiel reduzibler Darstellungen der Gruppe $D_3$ . . . . .	72
2.6	Beispiel für eine nichtlineare Realisierung . . . . .	73
<b>3</b>	<b>Kontinuierliche Gruppen: Lie-Gruppen und Lie-Algebren</b>	<b>79</b>
3.1	Lie-Gruppen . . . . .	79
3.2	Invariante Integration . . . . .	84
3.3	Lie-Algebren . . . . .	89
3.4	Zusammenhang zwischen Lie-Gruppen und Lie-Algebren . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Die Gruppen <math>SO(3)</math> und <math>SU(2)</math></b>	<b>94</b>
4.1	Beispiel: Drehgruppe $SO(3)$ . . . . .	94
4.2	Irreduzible Darstellungen, Charaktere und Clebsch-Gordan-Zerlegung . . . . .	97
4.2.1	Irreduzible Darstellungen . . . . .	97
4.2.2	Charaktere . . . . .	100
4.2.3	Clebsch-Gordan-Zerlegung . . . . .	101
4.3	Clebsch-Gordan-Koeffizienten und Wigner-Eckart-Theorem . . . . .	102
4.4	Beispiele . . . . .	116
<b>5</b>	<b><math>SU(N)</math> und Quarks</b>	<b>125</b>
5.1	Physikalische Motivation . . . . .	125

5.2	Mathematische Vorbemerkungen . . . . .	126
5.3	SU(2) (Isospin) . . . . .	130
5.4	SU(3) . . . . .	139
5.5	SU(N)-Multipletts und Young-Diagramme . . . . .	150
<b>6</b>	<b>Das Noether-Theorem</b>	<b>170</b>
6.1	Das Noether-Theorem in der klassischen Feldtheorie . . . . .	170
6.2	Mehr zum Noether-Theorem in der Quantenfeldtheorie . . . . .	174
<b>7</b>	<b>Eichtheorien</b>	<b>186</b>
7.1	Lokale Symmetrien . . . . .	186
7.1.1	QED . . . . .	186
7.1.2	Yang-Mills-Theorien . . . . .	191
7.2	Die Lagrange-Dichte der Quantenchromodynamik . . . . .	195
7.3	Zufällige globale Symmetrien von $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$ . . . . .	197
7.3.1	Chiraler Grenzfall . . . . .	197
7.3.2	Quarkmassen und explizite Brechung der chiralen Symmetrie . . . . .	201
<b>8</b>	<b>Übungsaufgaben</b>	<b>204</b>
<b>A</b>	<b>Zusammenstellung einiger mathematischer Grundbegriffe</b>	<b>252</b>
<b>B</b>	<b>Lagrange-Formalismus für Felder und kanonische Quantisierung</b>	<b>255</b>
B.1	Lagrange-Formalismus für Felder . . . . .	255
B.2	Kanonische Quantisierung des skalaren Feldes . . . . .	268
B.3	Quantisierung des Dirac-Feldes . . . . .	274
<b>C</b>	<b>Einige Formeln zur SU(3)</b>	<b>281</b>

# Kapitel 1

## Grundbegriffe und Beispiele

### 1.1 Definition von Grundbegriffen

**Definition 1.1.1** Eine **Transformation** auf einer nichtleeren Menge  $X$  ist eine bijektive Abbildung  $T : X \rightarrow X$ ,  $x \mapsto T(x)$ .

Eigenschaften:

1. Zwei Transformationen  $S$  und  $T$  können hintereinander ausgeführt werden:

$$S \circ T : X \rightarrow X, \quad x \mapsto (S \circ T)(x) = S(T(x)).$$

2. Die Komposition von Transformationen ist assoziativ, d. h. es gilt

$$(S \circ T) \circ U = S \circ (T \circ U)$$

für alle Transformationen  $S, T, U$ .

3. Die Identität  $I : X \rightarrow X$ ,  $x \mapsto I(x) = x$  ist eine Transformation mit der Eigenschaft  $I \circ T = T \circ I = T$  für alle Transformationen  $T$ .
4. Transformationen können invertiert werden, d. h. zu jedem  $T$  gibt es eine Transformation  $T' : X \rightarrow X$  mit  $T \circ T' = T' \circ T = I$ . Man schreibt  $T^{-1}$  für  $T'$ .

**Definition 1.1.2** Eine Menge von Transformationen auf einer Menge  $X$  heißt **Transformationsgruppe**, falls sie die Identität  $I$  und mit  $T, T_1, T_2$  auch  $T^{-1}$  und  $T_1 \circ T_2$  enthält.

**Definition 1.1.3** Die Gesamtheit aller Transformationen auf einer Menge  $X$  nennt man die **symmetrische Gruppe** oder auch **Permutationsgruppe**  $S(X)$  von  $X$ .

Die axiomatische Definition einer Gruppe entwickelte sich aus dem Begriff der Transformationsgruppe.

**Definition 1.1.4** Unter einer (abstrakten) **Gruppe**  $G$  verstehen wir eine nichtleere Menge, in der jedem geordneten Paar  $(a, b) \in G \times G$  ein Element  $ab \in G$ , das **Produkt** von  $a$  und  $b$ , zugeordnet ist (**Abgeschlossenheit**), so dass folgende Gesetze gelten:

(G1)  $a(bc) = (ab)c \forall a, b, c \in G$  (**Assoziativgesetz**).

(G2) Es existiert ein Element  $e \in G$  mit  $ea = ae = a \forall a \in G$  (**Einselement**).

(G3) Zu jedem  $a \in G$  existiert ein  $a^{-1} \in G$  mit  $aa^{-1} = a^{-1}a = e$  (**inverses Element**).

**Motivation 1.1.5** In der Geometrie und der Physik kommen Gruppen üblicherweise als Transformationen vor, die auf Objekte (Punktmengen), dynamische Variablen oder Zustände wirken.

1. In der Geometrie versteht man unter der Symmetriegruppe eines Körpers die Menge aller Transformationen, die die Abstände zwischen allen Paaren von Punkten des Körpers beibehalten und den Körper auf sich selbst abbilden.
2. In der Physik verstehen wir unter der Symmetriegruppe eines dynamischen Systems eine Gruppe von Transformationen, die eine Hamilton- oder Lagrange-Funktion (in der QM einen Hamilton-Operator) invariant lassen.

Beachte: In der Regel hängen die Symmetrieeigenschaften einer expliziten Lösung von den Anfangsbedingungen ab, d. h. die Symmetriegruppe des dynamischen Systems manifestiert sich nicht notwendigerweise in einer einzelnen expliziten Lösung.

Beispiele:

- (a) Klassische Physik: Die Hamilton-Funktion des Kepler-Problems ist rotationssymmetrisch. Die Planetenbahnen sind Ellipsen.
- (b) Quantensysteme: Der Grundzustand besitzt oft dieselbe Symmetrie wie der Hamilton-Operator.
  - i. Der Hamilton-Operator des Wasserstoffatoms besitzt eine  $O(3)$ -Symmetrie (tatsächlich eine „zufällige“  $O(4)$ -Symmetrie). Der Grundzustand ist auch rotationssymmetrisch, ein angeregter Zustand in der Regel nicht.
  - ii. Die Quantenelektrodynamik basiert auf einer elektromagnetischen  $U(1)$ -Symmetrie. Der Grundzustand (Vakuum) ist elektrisch neutral.
- (c) Eine wichtige Ausnahme bilden Systeme, die eine spontane Symmetriebrechung hervorbringen.

- i. Ferromagnet: Der Hamilton-Operator ist rotationssymmetrisch. Im Grundzustand ist eine Richtung durch die Magnetisierung ausgezeichnet.
  - ii. Die chirale  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -Symmetrie der Quantenchromodynamik für masselose  $u$ -,  $d$ - und  $s$ -Quarks ist im Grundzustand nach  $SU(3)_V$  gebrochen. Aufgrund des Goldstone-Theorems erwartet man 8 masselose Goldstone-Bosonen.
  - iii. Im elektroschwachen Standardmodell der Elementarteilchenphysik wird mittels des Higgs-Mechanismus eine  $SU(2) \times U(1)$ -Eichsymmetrie spontan nach  $U(1)$  gebrochen. Als Konsequenz werden 3 Eichbosonen massiv ( $W^\pm, Z^0$ ).
- (d) Die Aussagen (b) und (c) lassen sich im Coleman-Theorem zusammenfassen: Die Invarianz des Vakuums ist die Invarianz der Welt.

**Begriffe 1.1.6** • Eine Gruppe  $G$  heißt genau dann **kommutativ** oder **abelsch**, wenn  $ab = ba \forall a, b \in G$ .

- Die Anzahl der Elemente einer Gruppe bezeichnet man als **Ordnung**  $|G|$  von  $G$  (endlich, abzählbar unendlich, nicht abzählbar unendlich).
- Als **Struktur** einer Gruppe bezeichnet man die Angabe der Ergebnisse aller möglichen Kompositionen aus Paaren von Gruppenelementen.
- Jede endliche Gruppe  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  lässt sich durch ihre **Gruppen-tafel**  $T = (t_{ij})$  beschreiben, wobei  $t_{ij} = g_i g_j \in G$ .  $T$  ist eine  $(n, n)$ -Matrix über  $G$ .
- Für unendliche Gruppen wird die Struktur in der Regel durch die Angabe einer Vorschrift für die Gruppenmultiplikation spezifiziert.
- Zwei Gruppen  $G$  und  $G'$  sind **isomorph**,  $G \cong G'$ , wenn zwischen deren Elementen eine eindeutige Korrespondenz besteht, die bzgl. der Gruppenmultiplikation erhalten bleibt, d. h.

$$\underbrace{a'b'}_{\text{Produkt in } G'} = \underbrace{(ab)'}_{\text{Produkt in } G}$$

Sind zwei Gruppen isomorph, dann besitzen sie dieselbe Struktur.

- Als **treue Realisierung** einer abstrakten Gruppe bezeichnet man eine eindeutige Abbildung auf eine Gruppe konkreter Elemente mit einer konkreten Angabe der Gruppenmultiplikation, die die Struktur erhält. Alle treuen Realisierungen einer abstrakten Gruppe sind isomorph sowohl zur abstrakten Gruppe als auch zueinander. **Nicht-treue Realisierungen** erhalten zwar die Struktur, dabei ist die Abbildung der Gruppe allerdings nicht injektiv.

**Ausblick 1.1.7** • Realisierungen in Form von bijektiven, linearen Operatoren werden als **Darstellungen** bezeichnet (siehe Kapitel 2).

- In der Theorie der spontanen Symmetriebrechung spielen so genannte **nichtlineare Realisierungen** eine wichtige Rolle.

## 1.2 Beispiele

**Beispiel 1.2.1** Die abstrakte Gruppe der Ordnung 1,  $C_1$  (engl.: cyclic group, zyklische Gruppe), ist abelsch und besteht nur aus dem Element  $e$ .

Beispiele für Realisierungen:

- $\{1\}$  mit Multiplikation als Verknüpfung.
- $\{0\}$  mit Addition als Verknüpfung.

**Beispiel 1.2.2** Es existiert eine abstrakte Gruppe der Ordnung 2:  $C_2 = \{e, a\}$  mit  $a^2 = e$ . Sie ist die einfachste, nichttriviale abelsche Gruppe.

Gruppentafel:

$$\begin{array}{c|cc} & e & a \\ \hline e & e^2 = e & ea = a \\ a & ae = a & a^2 = e \end{array} = \begin{array}{c|cc} & e & a \\ \hline e & e & a \\ a & a & e \end{array} \stackrel{(G2)}{=} \begin{array}{c|c} e & a \\ \hline a & e \end{array}.$$

Beispiele für Realisierungen:

- $e \mapsto 1, a \mapsto -1$ :  $\{1, -1\}$  mit normaler Multiplikation als Verknüpfung.
- $X := \mathbb{R}^3$ .

$$e \mapsto I : X \rightarrow X, (x, y, z) \mapsto (x, y, z) \text{ (Identität),}$$

$$a \mapsto S : X \rightarrow X, (x, y, z) \mapsto (-x, y, z) \text{ (Spiegelung an der } yz\text{-Ebene).}$$

- Geometrische Realisierung: Rotation bzgl. einer festen Achse um  $0^\circ$  und  $180^\circ$ .

### Anmerkungen 1.2.3 zur Gruppentafel.

- Voraussetzung: Die erste Zeile und die erste Spalte sind in derselben Reihenfolge angeordnet.

Die Gruppentafel ist genau dann symmetrisch bzgl. der Hauptachse, d. h.  $t_{ij} = g_i g_j = t_{ji} = g_j g_i$ , wenn  $G$  abelsch ist.

- Jedes Element tritt genau einmal in einer Zeile bzw. Spalte auf. Deshalb sind die Zeilen (Spalten) Permutationen der ersten Zeile (Spalte).



Denn: Sei  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ . Annahme: O. B. d. A. habe die  $i$ te Zeile in der  $j$ ten und  $k$ ten Spalte dasselbe Element  $g$ , d. h.

$$t_{ij} = g_i g_j = t_{ik} = g_i g_k = g \text{ mit } g_j \neq g_k.$$

Multipliziere mit  $g_i^{-1}$  und benutze (G3)

$$\Rightarrow g_j = g_k = g_i^{-1} g$$

im Widerspruch zur Annahme  $g_j \neq g_k$ . Analog für Spalten.

**Beispiel 1.2.4** Abstrakte Gruppe der Ordnung 3:  $\{e, a, b\}$ .

Gruppentafel:

$e$	$a$	$b$		$e$	$a$	$b$	
$a$	$b$	$e$	,	$a$	$e$	$b$	Widerspruch zu 1.2.3
$b$	$e$	$a$		$b$			

d. h. es existiert genau eine (abelsche) abstrakte Gruppe der Ordnung 3 mit  $ab = ba = e$ ,  $a^2 = b$ ,  $b^2 = a$ . Beachte das zyklische Muster der Zeilen und Spalten.

Beispiele für Realisierungen:

- $\{1, \exp(\frac{2\pi i}{3}), \exp(\frac{4\pi i}{3})\}$  mit der Verknüpfung Multiplikation.
- Rotationen um eine feste Achse mit Drehwinkeln  $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ .

**Beispiel 1.2.5** Symmetriegruppe  $C_n$  der Drehungen eines regelmäßigen Vielecks (regulären Polygons) mit  $n \geq 2$  orientierten Seiten ( $n = 2$ : entartetes Polygon, so genanntes Digon).

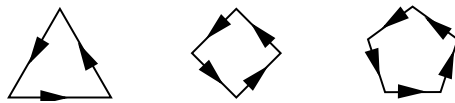


Abbildung 1.1: Reguläre Polygone mit orientierten Seiten, die jeweils durch die Rotationen von  $C_3$ ,  $C_4$  und  $C_5$  in sich selbst transformiert werden, wobei die Orientierung sich nicht ändern darf.

**Begriffe 1.2.6** • Für ein Element  $g \in G$  definieren wir die Potenzen von  $g$  durch

$$g^0 := e, \quad g^1 := g, \quad \dots, \quad g^{n+1} := (g^n)g, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$g^{-n} := (g^n)^{-1} = \underbrace{g^{-1} \dots g^{-1}}_{n\text{-mal}}.$$

- Eine Gruppe  $G$  heißt zyklisch, falls alle Elemente von  $G$  Potenzen eines einzigen Elements  $g$  sind.
- Es bezeichne  $c$  das Gruppenelement einer Drehung um  $\frac{2\pi}{n}$  (bzgl. einer zur Ebene der Figur orthogonalen Achse durch den Mittelpunkt der Figur, siehe Abbildung 1.1) mit  $n \in \mathbb{N}$ :

$$c^n = e.$$

Sprachgebrauch: Das Element  $c$  **erzeugt** die zyklische Gruppe  $C_n$  der Ordnung  $n$ :

$$C_n = \{e, c, c^2, \dots, c^{n-1}\} \quad \text{mit} \quad c^n = e.$$

Schreibweise:  $C_n = \langle c \rangle$  mit der so genannten **definierenden Relation**  $c^n = e$ .

$C_n$  ist abelsch, denn  $c^r c^s = c^{r+s} = c^{s+r} = c^s c^r$ .

- Für eine Teilmenge  $X = \{x_1, \dots, x_j\}$  von  $G$  mit  $0 < j \leq |G|$  sei

$$\langle X \rangle = \langle x_1, \dots, x_j \rangle := \{x_1^{z_1} \dots x_j^{z_j} \mid x_i \in X, z_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, j\}$$

das **Erzeugnis** von  $X$ .

**Beispiel 1.2.7** Die Symmetriegruppe eines regulären Polygons mit  $n \geq 2$  nichtorientierten Seiten heißt **Diedergruppe**  $D_n$  (engl.: dihedral group):

$$D_n = \langle c, b \rangle, \quad c^n = b^2 = (bc)^2 = e.$$

**Beispiel 1.2.8**  $D_3$ : Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks mit nichtorientierten Seiten, das durch die Rotationen von  $D_3$  in sich selbst transformiert wird.

Elemente:

- $e, c, c^2$  von  $C_3$ .  $c$ : Drehung um  $120^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn bzgl. der zum Dreieck orthogonalen Achse durch den Mittelpunkt des Dreiecks.
- $b_1 = b, b_2 = bc, b_3 = bc^2$ : Drehungen um  $180^\circ$  bzgl. der gestrichelten Achsen (siehe Abbildung 1.2).  $b_i^2 = e$ .

$$D_3 = \langle c, b \rangle \quad \text{mit den definierenden Relationen} \quad c^3 = b^2 = (bc)^2 = e.$$

Gruppentafel siehe Übung 1, Aufgabe 3.

Die Gruppen  $C_n$  und  $D_n$  kommen für  $n = 2, 3, 4$  und  $6$  als Symmetriegruppen regelmäßiger Festkörper vor (siehe Tabelle 7.3 aus N. W. Ashcroft und N. D. Mermin, Solid State Physics, Saunders College, Philadelphia, 1976).

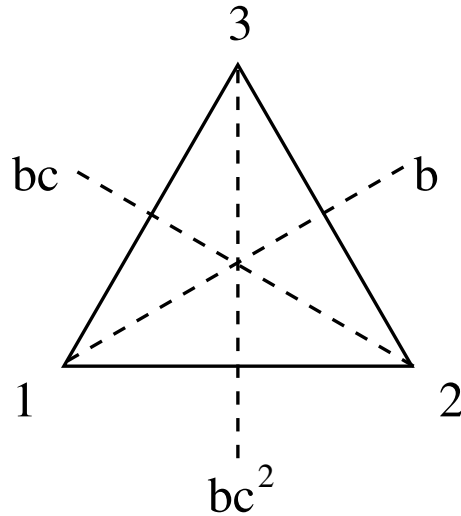


Abbildung 1.2: Gleichseitiges Dreieck mit nichtorientierten Seiten, das durch die Rotationen von  $D_3$  in sich selbst transformiert wird.

**Definition 1.2.9** Eine Teilmenge  $H$  von  $G$  heißt eine **Untergruppe** von  $G$ , wenn  $H$  mit der Verknüpfung von  $G$  eine Gruppe ist.

Schreibweise:  $H \leq G$ .

Ist  $G \neq H$ , so heißt  $H$  eine **echte Untergruppe** von  $G$ :  $H < G$ .

**Beispiel 1.2.10** Die zyklischen Gruppen  $C_n$  sind Untergruppen der Diedergruppen  $D_n$ .

**Beispiel 1.2.11** Symmetrische Gruppe  $S_n$  vom Grad  $n$ .

- In der Physik spielt die Gruppe  $S_n$  eine wichtige Rolle bei der Beschreibung von Zuständen, die aus  $n$  identischen Teilchen zusammengesetzt sind.
- Gegeben sei die Menge  $M = \{1, 2, \dots, n\}$ . Eine bijektive Abbildung  $\pi$  von  $M$  auf  $M$  heißt eine Permutation von  $n$  Elementen.
- Veranschaulichung: Betrachte eine Menge von  $n$  Kästchen (oder  $n$  Positionen), die mit 1 bis  $n$  bezeichnet seien. Jedes Kästchen sei mit einem Objekt belegt. Nun betrachten wir eine Umordnung der  $n$  Objekte, so dass das Objekt aus der Position 1 in die Position  $p_1$ , das Objekt aus der Position 2 in die Position  $p_2$  usw. gebracht wird. Einen solchen Übergang beschreiben wir mittels der folgenden Symbolik:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

d. h.  $\pi(k) = p_k$  für  $k = 1, \dots, n$ .

- Ordnung:  $n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$ . Z. B.:  $10! = 3\,628\,800$ .

- Identität

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

- Inverses Element

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

- Anordnung der Spalten irrelevant

- $n \geq 3$ : Nichtabelsch

- Beispiel:  $n = 3$

$$\boxed{A} \boxed{B} \boxed{C} \rightarrow \boxed{A} \boxed{B} \boxed{C} : e = P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{A} \boxed{B} \boxed{C} \rightarrow \boxed{B} \boxed{A} \boxed{C} : P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{A} \boxed{B} \boxed{C} \rightarrow \boxed{C} \boxed{B} \boxed{A} : P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{A} \boxed{B} \boxed{C} \rightarrow \boxed{A} \boxed{C} \boxed{B} : P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{A} \boxed{B} \boxed{C} \rightarrow \boxed{C} \boxed{A} \boxed{B} : P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{A} \boxed{B} \boxed{C} \rightarrow \boxed{B} \boxed{C} \boxed{A} : P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Anmerkung: Beim Nacheinanderausführen werden die Permutationen von rechts nach links angeordnet und von rechts nach links durchgeführt.

$$\boxed{A} \boxed{B} \boxed{C} \xrightarrow{P_6} \boxed{B} \boxed{C} \boxed{A} \xrightarrow{P_4} \boxed{B} \boxed{A} \boxed{C} :$$

$$P_4 P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = P_2.$$

$$\boxed{A} \boxed{B} \boxed{C} \xrightarrow{P_4} \boxed{A} \boxed{C} \boxed{B} \xrightarrow{P_6} \boxed{C} \boxed{B} \boxed{A} :$$

$$P_6 P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = P_3 \neq P_2.$$

- Gruppentafel: Siehe Übung 1, Aufgabe 3. und Aufgabe 6.

- **Zykelnotation**

Betrachte folgende Permutation aus  $S_8$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ : (123) 3-Zykel bzw. Zykel der Länge oder Periode 3. Der Zykel wird von links nach rechts gelesen. Innerhalb eines Zyklus kann man an jedem Punkt der Kette beginnen:

$$(123) = (231) = (312).$$

$4 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ : (45) = (54), 2-Zykel oder Transposition.

$6 \rightarrow 7 \rightarrow 6$ : (67) = (76).

$8 \rightarrow 8$ : (8), 1-Zykel, wird häufig unterdrückt.

- Die Identitätspermutation wird häufig durch ( ) abgekürzt.
- Jede Permutation lässt sich eindeutig als Produkt disjunkter Zykeln einer Permutation schreiben. Zykeln einer Permutation vertauschen, da sie keine gemeinsamen Symbole besitzen. Z. B. gilt für den obigen Fall (die nicht beteiligten Symbole sind unterdrückt):

$$(123)(45) = (45)(123).$$

Kurzform für

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Jeder  $r$ -Zykel mit  $r \geq 2$  lässt sich als Produkt von Transpositionen mit gemeinsamen Elementen schreiben. Die Zerlegung ist *nicht* eindeutig. Wir betrachten einen  $r$ -Zykel  $(n_1 n_2 \dots n_r)$ . Dieser kann als Produkt von  $r - 1$  überlappenden Transpositionen geschrieben werden:

$$(n_1 n_2 n_3 \dots n_{r-2} n_{r-1} n_r) = (n_1 n_2)(n_2 n_3) \dots (n_{r-2} n_{r-1})(n_{r-1} n_r).$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} (n_1 n_2 n_3) &= (n_1 n_2)(n_2 n_3) = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ n_2 & n_1 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ n_1 & n_3 & n_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ n_2 & n_3 & n_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aber auch

$$(n_1 n_2 n_3 \dots n_r) = (n_1 n_r)(n_1 n_{r-1}) \dots (n_1 n_3)(n_1 n_2).$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} (n_1 n_2 n_3) &= (n_1 n_3)(n_1 n_2) = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ n_3 & n_2 & n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ n_2 & n_1 & n_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ n_2 & n_3 & n_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Vorsicht: Hier vertauschen Transpositionen nicht, da sie *gemeinsame* Symbole besitzen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} P_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132) = (13)(32) \\ &\neq (32)(13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = P_5. \end{aligned}$$

- Wann ist eine Permutation gerade bzw. ungerade?

Beispiel: Gegeben sei der 3-Zykel  $(213) = (21)(13)$ . Wir betrachten die Abbildung

$$(21) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit der folgenden Wirkung auf die kartesischen Einheitsvektoren des  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \hat{e}_1 \mapsto \hat{e}_2, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \hat{e}_2 \mapsto \hat{e}_1, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \hat{e}_3 \mapsto \hat{e}_3 \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} (13) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{e}_1 \leftrightarrow \hat{e}_3, & \hat{e}_2 \mapsto \hat{e}_2, \\ (23) &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{e}_2 \leftrightarrow \hat{e}_3, & \hat{e}_1 \mapsto \hat{e}_1, \end{aligned}$$

d. h. Transpositionen lassen sich als Matrizen mit Determinante  $-1$  realisieren.

Verallgemeinerung auf  $(n, n)$ -Matrizen (für  $S_n$ ), z. B.

$$(13) = \underbrace{\left( \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & & 1 \end{array} \right)}_{n \text{ Spalten}} \left. \vphantom{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}} \right\} n \text{ Zeilen, } \Rightarrow \det(\quad) = -1.$$

- Eine Permutation ist gerade (ungerade), wenn sie sich nach dem oben beschriebenen Verfahren (zunächst Zerlegung in ein Produkt disjunkter Zykeln, anschließend Zerlegung jedes einzelnen Zykel in ein Produkt überlappender Transpositionen) als Produkt einer geraden (ungeraden) Anzahl von Transpositionen schreiben lässt. Wegen des Determinantenmultiplikationssatzes ist die Determinante einer geraden (ungeraden) Permutation  $+1$  ( $-1$ ).
- Die geraden Permutationen von  $S_n$  bilden die **alternierende Gruppe**  $A_n$  mit  $\frac{1}{2}n!$  Elementen. Die ungeraden Permutationen bilden keine Gruppe (z. B. Abgeschlossenheit:  $(-1)(-1) = 1 \neq -1$ , oder fehlende Identität).

**Beispiel 1.2.12** Alternierende Gruppe  $A_3$ . Drei Elemente:

$$\begin{aligned} e = A_1 &= P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\ a = A_2 &= P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123) = (12)(23), \\ a^2 = A_3 &= P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132) = (13)(32) = (13)(23), \end{aligned}$$

denn:

$$a^2 = (12)(23)(12)(23) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A_3.$$

Außerdem:

$$a^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e,$$

d. h.  $A_3 \cong C_3$ . Beachte, dass die Permutationen  $P_2$ ,  $P_3$  und  $P_4$  aus  $S_3$  ungerade sind und *keine* Gruppe bilden:

$$P_2 = (12), \quad P_3 = (13), \quad P_4 = (23).$$

**Satz 1.2.13 von Cayley.** Jede endliche Gruppe der Ordnung  $n$  ist isomorph zu einer Untergruppe von  $S_n$ .

Begründung: Für eine endliche Gruppe  $G = \{e, a, \dots\}$  der Ordnung  $n$  führt die Multiplikation mit einem Element  $g$  zu einer Permutation der Elemente (siehe 1.2.3)  $\{e, a, \dots\} \mapsto \{g, ga, \dots\}$ , d. h. wir können  $g$  die Permutation

$$g \mapsto \Pi(g) = \begin{pmatrix} e & a & \dots \\ g & ga & \dots \end{pmatrix}$$

zuordnen.

1. Die Abbildung ist injektiv.

Beweis durch Widerspruch: Sei  $\Pi(g) = \Pi(g')$  für  $g \neq g'$ .  $\Rightarrow gg_i = g'g_i$ .

1.2.3  $\Rightarrow g = g'$  im Widerspruch zur Annahme.

$\Pi$  definiert eine bijektive Abbildung von  $G$  nach  $\Pi(G) \subseteq S_n$ .

2. Die Abbildung erhält die Struktur von  $G$ . Denn:

$$\begin{aligned} \Pi(g_2)\Pi(g_1) &= \begin{pmatrix} e & a & \dots \\ g_2 & g_2a & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & a & \dots \\ g_1 & g_1a & \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_1 & g_1a & \dots \\ g_2g_1 & g_2g_1a & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & a & \dots \\ g_1 & g_1a & \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e & a & \dots \\ g_2g_1 & g_2g_1a & \dots \end{pmatrix} \\ &= \Pi(g_2g_1). \end{aligned}$$

**Beispiel 1.2.14** Laut Übung 1, Aufgabe 2. existieren zwei verschiedene abstrakte Gruppen der Ordnung 4, nämlich die zyklische Gruppe  $C_4$  mit der Gruppentafel

$e$	$c$	$c^2$	$c^3$
$c$	$c^2$	$c^3$	$e$
$c^2$	$c^3$	$e$	$c$
$c^3$	$e$	$c$	$c^2$

und die Viergruppe  $V$  oder Klein'sche Gruppe mit Gruppentafel

$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$e$	$c$	$b$
$b$	$c$	$e$	$a$
$c$	$b$	$a$	$e$

Laut 1.2.13 können wir folgende Isomorphismen mit Untergruppen von  $S_4$  herstellen:



- $C_4$ :

$$\begin{aligned} e &\mapsto \Pi(e) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \\ c &\mapsto \Pi(c) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \\ c^2 &\mapsto \Pi(c^2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ c^3 &\mapsto \Pi(c^3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d. h. nur zyklische Permutationen.

- $V$ :

$$\begin{aligned} e &\mapsto \Pi(e) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \\ a &\mapsto \Pi(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \\ b &\mapsto \Pi(b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ c &\mapsto \Pi(c) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### Beispiele 1.2.15 für abzählbar unendliche Gruppen.

1.  $\mathbb{Z}$  mit Addition. Addition assoziativ. Einselement 0. Inverses Element zu  $n \in \mathbb{Z}$  ist  $-n$ . Abelsch.
2. Gerade ganze Zahlen mit Addition.

1. und 2. sind isomorph zueinander:  $n \mapsto 2n$ .

### Beispiele 1.2.16 für Mengen, die keine Gruppen sind.

1.  $\{0, 1\}$  mit Addition nicht abgeschlossen.
2.  $\mathbb{R}$  mit Multiplikation. Kein inverses Element zu 0.

### Beispiele 1.2.17 für überabzählbare Gruppen.

1.  $O(3)$ : **Orthogonale Gruppe** in drei Dimensionen (Drehspiegelungen).

$V := \mathbb{R}^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) | x_i \in \mathbb{R}\}$ . Wir betrachten die Bilinearform  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$B(x, y) := \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i = x_i y_i \text{ (Einstein'sche Summenkonvention).}$$

Betrachte die lineare Abbildung

$$x \mapsto x' = Rx, \quad x'_i = R_{ij}x_j \text{ mit } \langle x', y' \rangle \stackrel{!}{=} \langle x, y \rangle.$$

$$R^T R = \mathbb{1}.$$

Eigenschaften der Determinante:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(A^T), \\ \det(AB) &= \det(A)\det(B). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\det(R^T R) = \det(R^T)\det(R) = (\det(R))^2 = 1. \Rightarrow \det(R) = \pm 1.$$

- $\det(R) = 1$ : **Spezielle orthogonale Gruppe**  $SO(3)$  (Drehgruppe ohne Spiegelungen).  $SO(3) < O(3)$ .
- $\{R \in O(3) | \det(R) = -1\}$  ist keine Gruppe. Abgeschlossenheit: Produkt zweier Elemente hat Determinante  $+1$ .
- Parität

$$P := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(3),$$

$$P^2 = \mathbb{1},$$

$$\det(P) = -1,$$

$$PR = RP \quad \forall R \in O(3).$$

- Sei  $R \in O(3)$  mit  $\det(R) = -1$ . Schreibe  $R = PR'$  mit  $R' = PR$  und  $\det(R') = +1$ .  $\Rightarrow O(3) = SO(3) \cup PSO(3)$  (Vereinigung disjunkter Mengen  $A \cup B: A \cap B = \emptyset$ ).
- Parität als Spiegelung an der  $yz$ -Ebene mit anschließender eigentlicher Drehung um  $180^\circ$  bzgl. der  $x$ -Achse

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

- Verallgemeinerung auf  $n$  Dimensionen:  
 $O(n), SO(n) = \{A \in O(n) | \det A = 1\}$ .
- Beachte: Die Determinante der Paritätstransformation (Spiegelung am Ursprung) ist nur für ungerades  $n$  gleich  $-1$ .

2. Unitäre Gruppe  $U(1)$ :

$$U(1) = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\} = \{\exp(i\varphi) | 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

mit Multiplikation.

### 3. Unitäre Gruppe $U(2)$ :

$$U(2) := \{U \mid \text{komplexe } (2, 2)\text{-Matrix, } U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1}\}$$

mit Matrizenmultiplikation als Verknüpfung.

**Spezielle unitäre Gruppe  $SU(2)$ .** Zusätzlich  $\det(U)=1$ .

Analog  $U(n)$  und  $SU(n)$ .

### Beispiel 1.2.18 Homogene Lorentz-Gruppe $L$ oder $O(1,3)$ .

Sei  $V = \mathbb{R}^4$ . Wir definieren die Minkowski-Metrik

$$M(x, x) := x_0 x_0 - \sum_{i=1}^3 x_i x_i = x^T G x$$

mit

$$G = (G_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3.$$

Beachte die an die Physik angepasste Nummerierung von 0 bis 3.

Betrachte die lineare Abbildung

$$x \mapsto x' = \Lambda x, \quad x'_i = \Lambda_{ij} x_j,$$

$$\text{mit } M(x', x') \stackrel{!}{=} M(x, x) = x^T \Lambda^T G \Lambda x = x^T G x,$$

d. h.

$$\Lambda^T G \Lambda = G. \tag{1.1}$$

$O(1, 3) = L := \{\Lambda \mid \Lambda \text{ reelle, invertierbare } (4, 4)\text{-Matrix mit } \Lambda^T G \Lambda = G\}$ .

### Eigenschaften 1.2.19 der $(4, 4)$ -Matrizen $\Lambda$ .

1.  $\det(\Lambda) = \pm 1$ . Denn:

$$\det(G) = -1 = \det(\Lambda^T G \Lambda) = \underbrace{\det(\Lambda^T)}_{\det(\Lambda)} \det(G) \det(\Lambda) = -(\det(\Lambda))^2.$$

$\det(\Lambda) = +1$ : Eigentliche Lorentz-Transformation.

2.  $\Lambda_{00} \geq 1$  oder  $\Lambda_{00} \leq -1$ . Denn:

Betrachte die Matrix-Gl. (1.1) für  $i = j = 0$ :

$$1 = \underbrace{\Lambda_{0k}^T}_{\Lambda_{k0}} G_{kl} \Lambda_{l0} = \Lambda_{00}^2 - \underbrace{\sum_{k=1}^3 \Lambda_{k0}^2}_{\leq 0}. \quad \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

$\Lambda_{00} \geq 1$ : Orthochrone Transformation; Zeitrichtung bleibt erhalten.

3. Vier so genannte Zweige  $L_{+,-}^{\uparrow,\downarrow}$ :

- (a)  $+$  :  $\det(\Lambda) = 1$ ,
- (b)  $-$  :  $\det(\Lambda) = -1$ ,
- (c)  $\uparrow$ :  $\Lambda_{00} \geq 1$ ,
- (d)  $\downarrow$ :  $\Lambda_{00} \leq -1$ .

4. Untergruppe der **eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen**:

$$L_+^{\uparrow} := \{ \Lambda | \Lambda \text{ reelle, invertierbare } (4, 4)\text{-Matrix,} \\ \Lambda^T G \Lambda = G, \det(\Lambda) = +1, \Lambda_{00} \geq 1 \}.$$

5. Besondere Transformationen:

Identität:  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in L_+^{\uparrow},$

Spiegelung der Raumachsen:  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in L_-^{\uparrow},$

Umkehrung der Zeitrichtung:  $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in L_-^{\downarrow},$

Produkt  $PT$ :  $PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in L_+^{\downarrow}.$

$\{E, P, T, PT\}$ : Klein'sche Gruppe (Felix Klein, 1849 - 1925), abelsch (Diagonalmatrizen kommutieren miteinander).

6.  $L_+^{\downarrow}, L_-^{\uparrow}, L_-^{\downarrow}$  keine Untergruppen von  $L$ , da sie Identität nicht enthalten.

7.  $L = L_+^{\uparrow} \cup PL_+^{\uparrow} \cup TL_+^{\uparrow} \cup PTL_+^{\uparrow}$  (Begründung analog zu  $O(3)$ ).

### Diskussion 1.2.20 von $L_+^{\uparrow}$ .

1. Eigentliche Drehungen (genau genommen isomorph zu  $SO(3)$ ):

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{mit } R \in SO(3).$$

Jede Drehung lässt sich mit Hilfe dreier reeller Parameter beschreiben, z. B. Drechachse  $\hat{n}$  und Drehwinkel. Parametrisierung durch Euler-Winkel:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_3(\alpha)R_2(\beta)R_3(\gamma), \quad 0 \leq \alpha, \gamma < 2\pi, \quad 0 \leq \beta \leq \pi. \quad (1.2)$$

2. Spezielle Lorentz-Transformationen  $L\left(\frac{\vec{p}}{E_p}\right)$ .

(a) Interpretation als (passive) Transformation in ein gestrichenes System, das sich relativ zum Ruhesystem eines Teilchens der Masse  $m$  mit  $-\frac{\vec{p}}{E_p}$  bewegt (engl.: Lorentz boost).

(b) Interpretation als aktive Transformation mit

$$(m, \vec{0}) \mapsto (E_p, \vec{p}), \quad E_p = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}.$$

Benutze Bra-Ket-Schreibweise

$$|\vec{p}\rangle = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \quad \langle \vec{p}| = (p_x \ p_y \ p_z).$$

Dann gilt

$$L\left(\frac{\vec{p}}{E_p}\right) = \frac{1}{m} \left( \begin{array}{c|c} E_p & \langle \vec{p}| \\ \hline |\vec{p}\rangle & m\mathbb{1}_{3 \times 3} + \frac{|\vec{p}\rangle\langle \vec{p}|}{E_p + m} \end{array} \right) \quad (1.3)$$

mit

$$\gamma = \frac{E_p}{m} \geq 1, \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{\gamma m} = \frac{\vec{p}}{E_p} = \beta \hat{n}, \quad 0 \leq \beta < 1, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Beispiel:  $\vec{p} = |\vec{p}|\hat{e}_z$ , d. h. das gestrichene System bewegt sich mit  $-\beta\hat{e}_z$  relativ zum ungestrichenen System, wobei  $\beta = |\vec{p}|/E_p$ :

$$L(\beta\hat{e}_z) = L\left(\frac{|\vec{p}|}{E_p}\hat{e}_z\right) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Wir haben benutzt:

$$\begin{aligned} \frac{E_p}{m} &= \gamma, \\ \frac{p_z}{m} &= \frac{|\vec{p}|}{m} = \beta\gamma, \\ |\vec{p}\rangle\langle \vec{p}| &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\vec{p}|^2 \end{pmatrix}, \\ \frac{|\vec{p}|^2}{m(E_p + m)} &= \frac{(E_p + m)(E_p - m)}{m(E_p + m)} = \frac{E_p - m}{m} = \gamma - 1. \end{aligned}$$

Es gilt

$$L(\beta \hat{e}_z) \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma m \\ 0 \\ 0 \\ \beta \gamma m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p \\ 0 \\ 0 \\ |\vec{p}| \end{pmatrix}.$$

Jede spezielle Lorentz-Transformation lässt sich durch drei reelle Parameter beschreiben, z. B. Richtung  $\hat{n}$  und Rapidität (engl.: rapidity)  $\lambda$  mit  $0 \leq \lambda < \infty$ , wobei

$$\sinh(\lambda) = \beta \gamma, \quad \cosh(\lambda) = \gamma, \quad \beta = \tanh(\lambda) = \frac{|\vec{p}|}{E_p}.$$

3. Jedes  $\Lambda \in L_+^\uparrow$  lässt sich folgendermaßen schreiben:

$$\Lambda = \mathcal{R}(\alpha, \beta, 0) L(v \hat{e}_z) \mathcal{R}^{-1}(\Phi, \Theta, \Psi) \quad \text{mit} \quad v = \tanh(\lambda).$$

(Hier  $v$  anstelle von  $\beta$ , um Verwechslung mit Winkel  $\beta$  zu vermeiden.)

Beweis: Benutze Gl. (1.1)

$$(\Lambda^T G \Lambda)_{ij} = \Lambda_{ik}^T G_{kl} \Lambda_{lj} = \Lambda_{ki} G_{kl} \Lambda_{lj} = G_{ij}$$

für  $i = j = 0$ :

$$1 = \Lambda_{k0} G_{kl} \Lambda_{l0}.$$

Definiere  $A_k = \Lambda_{k0}$ , d. h.  $1 = A_0^2 - \sum_{i=1}^3 A_i^2 = A_0^2 - \vec{A}^2$ . Wir parametrisieren

$$\begin{aligned} 1 \leq \Lambda_{00} = A_0 &= \cosh(\lambda), \\ A_1 &= \sinh(\lambda) \sin(\beta) \cos(\alpha), \\ A_2 &= \sinh(\lambda) \sin(\beta) \sin(\alpha), \\ A_3 &= \sinh(\lambda) \cos(\beta) \end{aligned} \tag{1.4}$$

mit  $0 \leq \lambda$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi$  und  $0 \leq \alpha < 2\pi$ . Denn:

$$\begin{aligned} A_0^2 - \vec{A}^2 &= \cosh^2(\lambda) - \sinh^2(\lambda) [\sin^2(\beta) \cos^2(\alpha) + \sin^2(\beta) \sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta)] \\ &= \cosh^2(\lambda) - \sinh^2(\lambda) = 1. \end{aligned}$$

Sei

$$t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(\Lambda t)_i = \Lambda_{ij} t_j = \Lambda_{i0} = A_i. \tag{1.5}$$

Betrachte

$$L(v\hat{e}_z)t = \begin{pmatrix} \cosh(\lambda) \\ 0 \\ 0 \\ \sinh(\lambda) \end{pmatrix} =: B. \quad (1.6)$$

Mit

$$\begin{aligned} & R_3(\alpha)R_2(\beta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sinh(\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sinh(\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\beta) \sinh(\lambda) \\ 0 \\ \cos(\beta) \sinh(\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \sin(\beta) \sinh(\lambda) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) \sinh(\lambda) \\ \cos(\beta) \sinh(\lambda) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\alpha, \beta, 0)L(v\hat{e}_z)t &\stackrel{(1.6)}{=} \mathcal{R}(\alpha, \beta, 0)B \stackrel{(1.4)}{=} A \stackrel{(1.5)}{=} \Lambda t. \\ &\Rightarrow t = \Lambda^{-1}\mathcal{R}(\alpha, \beta, 0)L(v\hat{e}_z)t, \end{aligned}$$

d. h.  $\Lambda^{-1}\mathcal{R}(\alpha, \beta, 0)L(v\hat{e}_z)$  ist ein Element der so genannten kleinen Gruppe von  $t$  (engl.: little group of  $t$ ), definiert als

$$\{\Lambda \in L_+^\uparrow | \Lambda t = t\}.$$

(Überprüfen Sie die Gruppenaxiome.) Das sind aber gerade die Rotationen aus  $SO(3)$  (siehe Übung 2, Aufgabe 2.), d. h.

$$\Lambda^{-1}\mathcal{R}(\alpha, \beta, 0)L(v\hat{e}_z) = \mathcal{R}(\Phi, \Theta, \Psi).$$

Multiplikation von links mit  $\Lambda$  und von rechts mit  $\mathcal{R}^{-1}(\Phi, \Theta, \Psi)$ .  $\Rightarrow$  Behauptung.

**Anmerkung 1.2.21** Es existieren auch andere Möglichkeiten  $\Lambda \in L_+^\uparrow$  zu parametrisieren, etwa

$$\Lambda = L\left(\frac{\vec{p}}{E_p}\right)\mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma).$$

## 1.3 Weitere Begriffe mit Beispielen

**Definition 1.3.1** Es sei  $M = \{m\}$  eine nichtleere Menge und  $G$  eine Gruppe. Eine Abbildung  $A$ , die jedem Paar  $(g, m) \in G \times M$  genau ein Element  $A(g, m) \in M$  zuordnet, definiert eine **Operation der Gruppe  $G$  auf  $M$**  (engl.: action of a group  $G$  on  $M$ ), wenn gilt:

1.  $A(e, m) = m \forall m \in M$ ,
2.  $A(g_1, A(g_2, m)) = A(g_1 g_2, m) \forall g_1, g_2 \in G, \forall m \in M$ .

**Beispiele 1.3.2** •  $M = G, A(g, m) = gm \in G = M$ : 1. klar. 2. folgt aus der Assoziativität der Gruppenmultiplikation.

- $M = \mathbb{R}^3, G = O(3), A_i(g, m) = g_{ij}m_j$ .
- Übung 3, Aufgaben 1. und 2.

Die Untermenge aller Elemente, die aus der Operation aller Elemente von  $G$  auf ein Element  $m_0$  entsteht, heißt die **Bahn von  $m_0$  in  $M$**  oder  **$G$ -Orbit von  $m_0$** .

**Beispiel 1.3.3** Bahnen der Drehgruppe im  $\mathbb{R}^3$  sind Oberflächen von Kugeln mit Radius  $r$  für jedes  $0 < r < \infty$ . Der Ursprung wird auf sich selbst abgebildet.

**Beispiel 1.3.4** So genannte **Gruppeninvarianten** sind triviale, d. h. ein-elementige Bahnen.

**Beispiel 1.3.5 aus der klassischen Physik.** Es sei  $M = \{H(\vec{p}, \vec{x})\}$  die Menge der Hamilton-Funktionen eines Teilchens in drei Dimensionen. Die Hamilton-Funktion eines Teilchens in einem Zentralpotenzial,

$$H(\vec{p}, \vec{x}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(|\vec{x}|),$$

ist invariant unter

$$\begin{aligned} x_i &\mapsto R_{ij}x_j, \\ p_i &\mapsto R_{ij}p_j, \end{aligned}$$

mit  $R$  in  $O(3)$ .

**Beispiel 1.3.6 aus der Feldtheorie.** Es sei  $G = O(2) = SO(2) \cup S_2SO(2)$ , wobei

$$S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



eine Spiegelung an der 2-Achse ist. Jedes  $g \in G$  lässt sich entweder als

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \det(R(\varphi)) = 1,$$

oder als

$$S_2R(\varphi) = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \det(S_2R(\varphi)) = -1,$$

parametrisieren ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ). Gegeben sei eine Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(\Phi_1, \Phi_2, \partial_\mu \Phi_1, \partial_\mu \Phi_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\partial_\mu \Phi_i \partial^\mu \Phi_i - m_i^2 \Phi_i^2) - \mathcal{V}(\Phi_1, \Phi_2) \quad (1.7)$$

zweier reeller, skalarer Felder  $\Phi_i(t, \vec{x})$ ,  $\Phi_i \in C^2(M^4)$ ,  $i = 1, 2$  ( $M^4$ : Minkowski-Raum). Wir definieren als Operation der Gruppe  $G$  auf  $M = \{(\Phi_1, \Phi_2)\}$ ,

$$\begin{pmatrix} \Phi'_1 \\ \Phi'_2 \end{pmatrix} := A(R(\varphi), (\Phi_1, \Phi_2)) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \in M,$$

für  $R(\varphi) \in \text{SO}(2)$  und analog für  $S_2R(\varphi) \in S_2\text{SO}(2)$ . Beachte

$$\begin{aligned} A(R(0), (\Phi_1, \Phi_2)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \\ A(g_1, A(g_2, (\Phi_1, \Phi_2))) &= A(g_1 g_2, (\Phi_1, \Phi_2)). \end{aligned}$$

(Das Produkt von Drehmatrizen ist wieder eine Drehmatrix.) Wir betrachten die Menge aller Lagrange-Dichten mit der Form aus Gl. (1.7). Die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}$  ist genau dann eine Gruppeninvariante, d. h.

$$\mathcal{L}(\Phi_1, \Phi_2, \partial_\mu \Phi_1, \partial_\mu \Phi_2) = \mathcal{L}(\Phi'_1, \Phi'_2, \partial_\mu \Phi'_1, \partial_\mu \Phi'_2),$$

wenn

- $m_1 = m_2$

und

- $\mathcal{V}$  nur eine Funktion von  $\Phi_1^2 + \Phi_2^2$  ist.

**Ausblick 1.3.7** Die Lagrange-Dichte des Standardmodells der Elementarteilchenphysik ist eine Gruppeninvariante mit  $G = \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$ . Dazu benötigt man die (lokale) Operation der Gruppe  $G$  auf der Menge der Quarks und Leptonen (Materiefelder) sowie der Eichbosonen und der Higgs-Felder.

Das Ziel der folgenden Überlegungen besteht darin, Gruppen in Mengen mit ähnlichen Eigenschaften zu zerlegen.

**Definition 1.3.8 Äquivalenzrelation.** Eine binäre Relation  $R$  in einer Menge  $M$  heißt Äquivalenzrelation, falls  $R$

1. reflexiv

$$a \sim a,$$

2. symmetrisch

$$a \sim b \Rightarrow b \sim a,$$

3. transitiv

$$a \sim b \text{ und } b \sim c \Rightarrow a \sim c$$

ist.

Salopp ausgedrückt steht  $a \sim b$  für eine Übereinstimmung „in gewisser Hinsicht“ in Abschwächung zur vollständigen Gleichheit.

**Definition 1.3.9 Partition.** Eine endliche oder unendliche Menge  $\mathcal{P}$  von Teilmengen einer vorgelegten Menge  $M$  heißt eine Partition von  $M$ , wenn gilt:  $M = \cup_{T \in \mathcal{P}} T$  und  $S \cap T = \emptyset$  für je zwei Mengen  $S, T \in \mathcal{P}$ .

Beispiel: Zerlegung der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  in die Menge  $G := \{2, 4, 6, \dots\}$  der geraden und  $U := \{1, 3, 5, \dots\}$  der ungeraden Zahlen.

**Satz 1.3.10** Jede Äquivalenzrelation  $R$  auf einer Menge  $M$  liefert eine Partition in (disjunkte) **Äquivalenzklassen**

$$T_a = \{b \in M | b \sim a\}.$$

Begründung: Beginne mit  $a \in M$  und konstruiere  $T_a$ . Ist  $T_a \neq M$ , wähle  $b \notin T_a$  und konstruiere  $T_b$ , usw.  $T_a \cap T_b = \emptyset$ , denn sei  $d \in T_a$  und  $d \in T_b$ .  $\Rightarrow a \sim d, b \sim d$ .  $\Rightarrow a \sim b$  im Widerspruch zur Annahme  $b \notin T_a$ .

**Definition 1.3.11 Konjugation.** Es seien  $a, b \in G$ .  $b$  heißt zu  $a$  konjugiert, falls ein  $g \in G$  mit  $b = gag^{-1}$  existiert.  $g$  heißt konjugierendes Element.

**Anwendung 1.3.12** Konjugation stellt eine Äquivalenzrelation dar, denn

1.  $a \sim a$  mit  $a = eae^{-1}$ .
2.  $a \sim b \Rightarrow a = bgb^{-1} \Rightarrow b = g^{-1}ag \Rightarrow b \sim a$  mit  $g^{-1}$  als konjugierendem Element.
3.  $a = g_1bg_1^{-1}, b = g_2cg_2^{-1} \Rightarrow a = g_1g_2cg_2^{-1}g_1^{-1} = g_1g_2c(g_1g_2)^{-1}$ . Konjugierendes Element  $g_1g_2$ .

1.3.10  $\Rightarrow$  Zerlegung der Gruppe in disjunkte Konjugationsklassen

$$(a) = \{b | b = gag^{-1}, g \in G\}.$$

**Folgerungen 1.3.13** 1.  $(e) = \{e\}$ , denn  $geg^{-1} = e \forall g$ .

2.  $a \in (a)$ .

3.  $b \in (a) \Leftrightarrow (a) = (b)$ .

**Beispiele 1.3.14** 1. Sei  $G$  eine abelsche Gruppe. Für  $a \in G$  gilt

$$(a) = \{b \mid b = \underbrace{gag^{-1}}_{g^{-1}a}, g \in G\} = \{a\},$$

d. h. jedes Element einer abelschen Gruppe ist nur zu sich selbst konjugiert.

2.  $D_3 = \langle c, b \rangle$  mit  $c^3 = b^2 = (bc)^2 = e$ . Gruppentafel siehe Übung 1, Aufgabe 3.:

$e$	$c$	$c^2$	$b$	$bc$	$bc^2$
$c$	$c^2$	$e$	$bc^2$	$b$	$bc$
$c^2$	$e$	$c$	$bc$	$bc^2$	$b$
$b$	$bc$	$bc^2$	$e$	$c$	$c^2$
$bc$	$bc^2$	$b$	$c^2$	$e$	$c$
$bc^2$	$b$	$bc$	$c$	$c^2$	$e$

•  $e$ :  $(e) = \{e\}$ .

•  $c$ :

$$\begin{aligned} c^2c(c^2)^{-1} &= ec = c, \\ bcb^{-1} &= bcb = c^2, \\ bcc(bc)^{-1} &= bc^2bc = c^2, \\ bc^2c(bc^2)^{-1} &= bbc^2 = c^2. \\ \Rightarrow (c) &= (c^2) = \{c, c^2\}. \end{aligned}$$

•  $b$ :

$$\begin{aligned} bcb^{-1} &= bcb = bc, \\ c^2b(c^2)^{-1} &= c^2bc = bc^2. \\ \Rightarrow (b) &= (bc) = (bc^2) = \{b, bc, bc^2\}. \end{aligned}$$

Wir benutzen nun das Konzept einer Untergruppe  $H$  von  $G$ , um  $G$  in disjunkte Nebenklassen zu zerlegen.

**Definition 1.3.15** Sei  $H$  eine Untergruppe von  $G$  und  $g \in G$ .

$$gH := \{gh \mid h \in H\}, \quad Hg := \{hg \mid h \in H\}$$

heißt eine **Links-** bzw. **Rechtsnebenklasse von  $H$  in  $G$** .

Es gilt

1.  $G = \cup_{g \in G} gH$ .
2. Entweder  $g_1H = g_2H$  oder  $g_1H \cap g_2H = \emptyset$ .
3.  $g_2 \in g_1H \Rightarrow g_2H = g_1H$ .

Beweis:

1. Da  $e \in H$ , gilt  $g = ge \in gH$ .
2. Definiere Äquivalenzrelation  $a \sim b$ , wenn  $b \in aH$ .
  - (a)  $e \in H \Rightarrow a = ae \in aH \Rightarrow a \sim a \Rightarrow$  reflexiv.
  - (b)  $a \sim b \Rightarrow b \in aH \Rightarrow b = ah$  für ein  $h \in H$ .  $\Rightarrow a = bh^{-1}$  mit  $h^{-1} \in H \Rightarrow a \in bH \Rightarrow$  symmetrisch.
  - (c)  $a \sim b, b \sim c \Rightarrow b \in aH, c \in bH \Rightarrow b = ah$  und  $c = bh'$  mit  $h, h' \in H$ .  $\Rightarrow c = ahh'$  mit  $hh' \in H \Rightarrow c \in aH \Rightarrow a \sim c \Rightarrow$  transitiv.

Wende nun Satz 1.3.10 an.

3.  $g_2 \in g_1H \Rightarrow g_1 \sim g_2 \Rightarrow g_1 \in g_2H \stackrel{2}{\Rightarrow} g_1H = g_2H$ .

**Definition 1.3.16 Normalteiler.** Eine Untergruppe  $H$  von  $G$  mit der Eigenschaft

$$Hg = gH \quad \forall g \in G$$

heißt Normalteiler von  $G$ :  $H \trianglelefteq G$ .

Multipliziere von rechts mit  $g^{-1}$ :

$$Hg = gH \quad \forall g \in G \iff gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G,$$

d. h. eine Untergruppe  $H$  von  $G$  ist genau dann ein Normalteiler von  $G$ , wenn  $h \in H \Rightarrow ghg^{-1} \in H \quad \forall g \in G$ .

Triviale Beispiele:  $\{e\}$  und  $G$ .

**Beispiel 1.3.17**  $D_3$  (Ergebnisse der Konjugation siehe 1.3.14).

- $H = \{e, b\} \cong C_2$  ist kein Normalteiler:  
 $(e) = \{e\}$ ,  $(b) = \{a \mid a = gbg^{-1}, g \in D_3\} = \{b, bc, bc^2\}$ , d. h.  $(e) \cup (b) = \{e, b, bc, bc^2\} \neq \{e, b\}$ .
- $H = \{e, c, c^2\} \cong C_3$  ist ein Normalteiler:  
 $(c) = \{c, c^2\}$ , d. h.  $(e) \cup (c) = \{e, c, c^2\}$ .

**Beispiel 1.3.18** Jede Untergruppe einer abelschen Gruppe ist ein Normalteiler, denn

$$ghg^{-1} = gg^{-1}h = h \quad \forall h \in H, g \in G.$$

**Definition 1.3.19 Zentrum.** Das Zentrum  $Z$  einer Gruppe  $G$  besteht aus allen Elementen  $z$ , die mit allen Elementen der Gruppe kommutieren:

$$Z := \{z \in G \mid zg = gz \quad \forall g \in G\}.$$

**Anmerkung 1.3.20** 1.  $Z$  ist eine abelsche Untergruppe von  $G$ . Siehe Übung 3, Aufgabe 3. (a).

2.  $Z$  ist ein Normalteiler von  $G$ . Siehe Übung 3, Aufgabe 3. (b).

**Gegenbeispiel 1.3.21** Betrachte  $G = \text{SO}(3)$ .  $H = \{\text{Drehungen bzgl. } z\text{-Achse}\}$ .  $H$  ist kein Normalteiler.

Begründung: Sei  $h \in H$ :

$$h = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$g$  Drehung bzgl.  $x$ -Achse mit Drehwinkel  $\pi/2$ :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$ghg^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

d. h.  $ghg^{-1}$  ist Drehung bzgl.  $-\hat{e}_y$  mit Drehwinkel  $\varphi \Rightarrow ghg^{-1} \notin H$ .

**Definition 1.3.22 Komplexprodukt von  $A$  mit  $B$ .** Seien  $A$  und  $B$  zwei nichtleere Teilmengen von  $G$ . Wir definieren

$$AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}.$$

**Satz 1.3.23 Faktorgruppe.** Sei  $H$  ein Normalteiler von  $G$ . Die Menge aller Nebenklassen bildet mit der Verknüpfung Komplexprodukt die so genannte Faktorgruppe  $G/H$  (sprich  $G$  nach  $H$  oder  $G$  modulo  $H$ ). Beachte: Die Elemente einer Faktorgruppe sind disjunkte *Teilmengen* von  $G$ .

Begründung: Wir überprüfen zunächst die Abgeschlossenheit bzgl. des Komplexproduktes.

$$(aH)(bH) \stackrel{(G1)}{=} \underset{aHbH}{=} \underset{H \text{ Normalteiler}}{=} ab \underbrace{HH}_H = abH.$$

(G1) – (G3) siehe Übung 4, Aufgabe 1. (a).

**Beispiele 1.3.24** 1.  $G = C_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$  mit  $a^4 = e$ ,  $H = \{e, a^2\}$ .  
 $C_4$  abelsch.  $\stackrel{1.3.18}{\Rightarrow} H$  Normalteiler.

$$G/H = \{E, A\} \text{ mit } E = \{e, a^2\}, A = \{a, a^3\}, A^2 = E.$$

Anzahl der Elemente:  $4/2 = 2$ .

2.  $G = O(3)$ ,  $H = SO(3)$ .  $SO(3) \trianglelefteq O(3)$ , da  $\det(ghg^{-1}) = \det(h) = 1 \forall h \in SO(3)$  und  $g \in O(3)$ . Sei  $g \notin SO(3)$ :  $g = ph$  mit  $h \in SO(3)$  und

$$p = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow gH = pH$ .  $\Rightarrow$  Gruppentafel

$$\frac{H \mid pH}{pH \mid H}$$

d. h.  $O(3)/SO(3) \cong C_2 (\cong S_2)$ .

Auch  $Z_2 = \{e, p\}$  ist ein Normalteiler. Die Faktorgruppe  $O(3)/Z_2$  besteht aus  $\{\{g, pg\} \mid g \in SO(3)\}$ . Wir werden sehen, dass  $O(3)/Z_2 \cong SO(3)$ .

**Definition 1.3.25** Eine Gruppe  $G$  heißt einfach, wenn sie außer  $\{e\}$  und  $G$  keinen Normalteiler besitzt.

**Beispiele 1.3.26** für einfache Gruppen (ohne Beweis):

1.  $SO(3)$ ;
2.  $L_+^\uparrow$ .

**Gegenbeispiele 1.3.27** 1.  $O(3)$  ist nicht einfach, da  $SO(3) \trianglelefteq O(3)$ .

2.  $SU(2)$  ist nicht einfach, da  $\{\mathbb{1}_{2 \times 2}, -\mathbb{1}_{2 \times 2}\} \trianglelefteq SU(2)$ . Siehe Übung 3, Aufgaben 3. und 4.

**Definition 1.3.28** Seien  $A$  und  $B$  Gruppen. Das kartesische Produkt  $G := A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$  wird durch die komponentenweise Multiplikation  $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$  zu einer Gruppe, dem **externen direkten Produkt** der Gruppen  $A$  und  $B$ .

**Beispiele 1.3.29** 1.  $G = SU(3) \times SU(3)$  (chirale Symmetrie der Quantenchromodynamik für  $m_u = m_d = m_s = 0$ ).

2.  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  (Eichsymmetrie des Standardmodells der Elementarteilchenphysik).

**Definition 1.3.30** Eine Gruppe  $G$  ist das **interne direkte Produkt** ihrer Untergruppen  $A$  und  $B$ ,  $G = A \times B$ , wenn

1. alle Elemente von  $A$  mit denen von  $B$  vertauschen,
2. jedes Element  $g \in G$  *eindeutig* als  $g = ab$  mit  $a \in A$  und  $b \in B$  geschrieben werden kann.

Die Eindeutigkeit impliziert, dass  $A \cap B = \{e\}$ .

**Beispiel 1.3.31**  $O(3)$  ist das interne direkte Produkt aus  $SO(3)$  und  $\{\mathbb{1}_{3 \times 3}, -\mathbb{1}_{3 \times 3}\}$ .  
Siehe Übung 4, Aufgabe 2.

**Folgerung 1.3.32** Sei  $A^* := \{(a, e') | a \in A\}$  mit  $e' \in B$  und analog für  $B^*$ . Die Untergruppen  $A$  und  $B$  ( $A^*$  und  $B^*$ ) eines internen (externen) direkten Produkts sind Normalteiler von  $G$ , denn

$$ga_i g^{-1} = aba_i b^{-1} a^{-1} = aa_i a^{-1} \in A \quad \forall a, a_i \in A, b \in B,$$

und analog für  $B$ . (Ebenso für  $A^*$  und  $B^*$ .)

**Definition 1.3.33** Eine Gruppe  $G$  heißt **halbeinfach**, wenn  $G$  direktes Produkt nichtabelscher einfacher Gruppen ist.

**Beispiel 1.3.34**  $SO(3) \times SO(3)$  ist halbeinfach.

**Gegenbeispiel 1.3.35**  $SU(N) \times SU(N)$  ist nicht halbeinfach, da  $SU(N)$  das Zentrum

$$Z = \left\{ z_n = \exp\left(\frac{2\pi ni}{N}\right) \mathbb{1}_{N \times N} \mid n = 0, 1, \dots, N-1 \right\}$$

besitzt. Beachte:

$$\det(z_n) = \left[ \exp\left(\frac{2\pi ni}{N}\right) \right]^N = \exp(2\pi ni) = 1.$$

## 1.4 Homomorphismen

**Definition 1.4.1** Seien  $G$  und  $G'$  Gruppen. Eine Abbildung

$$\varphi : G \rightarrow G' \quad \text{mit} \quad g \mapsto \varphi(g)$$

heißt (Gruppen-) Homomorphismus von  $G$  in  $G'$ , falls

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2).$$

---

\* Sei  $X \subseteq G$  und  $Y \subseteq G'$ :

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= \{\varphi(g) | g \in X\} && : \text{Bild von } X, \\ \varphi^{-1}(Y) &= \{g \in G | \varphi(g) \in Y\} && : \text{Urbild von } Y \text{ unter } \varphi, \\ \text{Kern}(\varphi) &= \{g \in G | \varphi(g) = e'\}.\end{aligned}$$

$\varphi$  heißt

Epimorphismus:  $\varphi(G) = G'$ , surjektiv  
Endomorphismus:  $G' = G$   
Monomorphismus:  $\varphi$  injektiv, d. h.  $g_1 \neq g_2 \Rightarrow \varphi(g_1) \neq \varphi(g_2)$   
Isomorphismus:  $\varphi$  bijektiv, d. h.  $\varphi(G) = G'$  und  $\varphi$  injektiv,  $G \cong G'$   
Automorphismus:  $\varphi$  bijektiver Endomorphismus

Konsequenzen aus den Gruppenaxiomen:

1.  $\varphi(e) = e'$ .
2.  $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1} \forall g \in G$ .
3.  $H \leq G \Rightarrow \varphi(H) \leq G'$ .
4.  $H' \leq G' \Rightarrow \varphi^{-1}(H') \leq G$ .

Beweis (exemplarisch):

1.  $\varphi(e)\varphi(g) = \varphi(eg) = \varphi(g) = \varphi(ge) = \varphi(g)\varphi(e) \forall g \in G$ .  $e'$  eindeutig  
 $\Rightarrow \varphi(e) = e'$ .

---

### Beispiel 1.4.2 Zusammenhang zwischen $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ und $L_+^\uparrow$ .

( $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ ): Invertierbare, komplexe (2,2)-Matrizen mit Determinante 1.)

Es existiert ein (2  $\rightarrow$  1)-Epimorphismus

$$\varphi : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow L_+^\uparrow \text{ mit } A \mapsto \varphi(A) \text{ wobei } \varphi_{ij}(A) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}_i A \tilde{\sigma}_j A^\dagger), \\ (i, j = 0, 1, 2, 3).$$

Dabei besitzen  $\pm A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  dasselbe Bild  $\varphi(A) \in L_+^\uparrow$ .

Beweis:

1. Vorbereitende Bemerkungen

Wir definieren die Pauli-Matrizen  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



Eigenschaften:

$$\sigma_i = \sigma_i^\dagger, \quad \text{Tr}(\sigma_i) = 0, \quad \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1}_{2 \times 2} + i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad i, j, = 1, 2, 3.$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } (i, j, k) \text{ gerade Permutation von } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{für } (i, j, k) \text{ ungerade Permutation von } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir führen als Abkürzung ein:

$$\tilde{\sigma}_0 = \mathbb{1}_{2 \times 2}, \quad \tilde{\sigma}_i = \sigma_i \quad \text{für } i = 1, 2, 3.$$

Jede komplexe  $(2, 2)$ -Matrix lässt sich schreiben als

$$M = a_0 \mathbb{1}_{2 \times 2} + \sum_{i=1}^3 \sigma_i a_i = \sum_{i=0}^3 a_i \tilde{\sigma}_i, \quad a_i \in \mathbb{C},$$

mit

$$a_i = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}_i M), \quad i = 0, \dots, 3.$$

Spezialfälle:

- (a)  $M$  hermitesch  $\Leftrightarrow a_i$  reell.
- (b)  $M$  spurlos und hermitesch  $\Leftrightarrow a_0 = 0$  und  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) reell.
- (c)  $M \in \text{SU}(2) \Leftrightarrow a_j := ib_j, j = 1, 2, 3, a_0^2 + \sum_{j=1}^3 b_j^2 = 1, a_0, b_j \in \mathbb{R}.$

Siehe Übung 4, Aufgabe 4.

## 2. Zusammenhang zwischen dem Minkowski-Raum $M^4$ und der Menge $\mathcal{H}(2)$ der hermiteschen $(2, 2)$ -Matrizen

Mit jedem Punkt  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  des Minkowski-Raums  $M^4$  identifizieren wir eine hermitesche  $(2, 2)$ -Matrix

$$X = \sum_{i=0}^3 x_i \tilde{\sigma}_i = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = X^\dagger$$

mit

$$x_i = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}_i X), \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Für die Determinante gilt

$$\det(X) = (x_0 + x_3)(x_0 - x_3) - (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = x_0^2 - \vec{x}^2 = M(x, x),$$

mit der Minkowski-Metrik aus 1.2.18.

### 3. Definition der Abbildung

Es sei  $A$  zunächst eine beliebige, invertierbare, komplexe  $(2, 2)$ -Matrix, d. h.  $A \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ . Betrachte die Abbildung

$$\mathcal{H}(2) \ni X \mapsto Y := AXA^\dagger = \sum_{i=0}^3 y_i \tilde{\sigma}_i.$$

Dann gilt:

- (a)  $Y^\dagger = (AXA^\dagger)^\dagger = AX^\dagger A^\dagger = AXA^\dagger = Y$ .
- (b)  $\det(Y) = \det(A)\det(X)\det(A^\dagger) = |\det(A)|^2 \det(X)$ .

Für  $A \in \text{SL}_2(2, \mathbb{C})$ , d. h.  $|\det(A)| = 1$ , gilt

$$\det(X) = \det(Y), \quad \text{d. h.} \quad M(x, x) = x_0^2 - \bar{x}^2 = y_0^2 - \bar{y}^2 = M(y, y).$$

Insbesondere gilt dies für den Spezialfall  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ , d. h.  $\det(A) = 1$ , auf den wir uns im Folgenden beschränken.

Die durch

$$y = \varphi(A)x$$

mit

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}_0 Y) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}_0 AXA^\dagger) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}_0 A \tilde{\sigma}_0 A^\dagger) x_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \text{Tr}(\tilde{\sigma}_0 A \tilde{\sigma}_j A^\dagger) x_j, \\ y_i &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}_i Y) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}_i AXA^\dagger) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}_i A \tilde{\sigma}_0 A^\dagger) x_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \text{Tr}(\tilde{\sigma}_i A \tilde{\sigma}_j A^\dagger) x_j, \end{aligned}$$

definierte  $(4, 4)$ -Matrix  $\varphi(A)$  mit den Einträgen

$$\begin{aligned} \varphi_{00}(A) &= \frac{1}{2} \text{Tr}(AA^\dagger), \\ \varphi_{0j}(A) &= \frac{1}{2} \text{Tr}(A \tilde{\sigma}_j A^\dagger), \quad j = 1, 2, 3, \\ \varphi_{i0}(A) &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}_i A A^\dagger), \quad i = 1, 2, 3, \\ \varphi_{ij}(A) &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}_i A \tilde{\sigma}_j A^\dagger), \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

stellt wegen  $M(x, x) = M(y, y)$  eine Lorentz-Transformation dar.

### 4. $\varphi(A) \in \text{L}_+^\uparrow$

(a)  $\varphi(A)$  ist orthochron.

$$\begin{aligned}\varphi_{00}(A) &= \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(AA^\dagger) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (AA^\dagger)_{ii} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 A_{ij} \underbrace{(A^\dagger)_{ji}}_{A_{ij}^*} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 |A_{ij}|^2 > 0,\end{aligned}$$

da  $A \neq 0$ . Da entweder  $\varphi_{00}(A) \geq 1$  oder  $\varphi_{00}(A) \leq -1$ , folgt die Behauptung.

(b)  $\varphi(A)$  ist eine eigentliche Lorentz-Transformation.

Wir benutzen folgendes Resultat aus der linearen Algebra: Jedes  $A \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$  ist konjugiert zu einer oberen Dreiecksmatrix der Form

$$A = B \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} B^{-1}, \quad a \neq 0.$$

Es seien  $a(t)$  und  $b(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , stetige Kurven in  $\mathbb{C}$  mit  $a(0) = 1$  und  $a(1) = a$  und  $b(0) = 0$  und  $b(1) = b$ , d. h.

$$A(t) = B \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ 0 & [a(t)]^{-1} \end{pmatrix} B^{-1},$$

mit

$$\begin{aligned}A(0) &= \mathbb{1}_{2 \times 2}, \\ A(1) &= A.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Determinante von  $A(t)$

$$\det(A(t)) = \det(B) \underbrace{a(t)[a(t)]^{-1}}_1 \underbrace{\det(B^{-1})}_{[\det(B)]^{-1}} = 1.$$

Beachte, dass  $a(t) \neq 0$ , da  $A(t) \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$ . D. h. jede Matrix aus  $\operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$  lässt sich stetig mit der Identität verbinden. Damit ist aber auch  $\varphi(A(t))$  eine stetige Kurve in  $L_+^\uparrow \cup L_-^\uparrow$ . Wegen der Stetigkeit der Determinantenbildung ist  $\det(\varphi(A(t)))$  eine stetige Funktion, die nur die Werte  $-1$  und  $+1$  annehmen kann. Da  $\varphi(A(0)) = \varphi(\mathbb{1}_{2 \times 2}) = \mathbb{1}_{4 \times 4}$  und  $\det(\mathbb{1}_{4 \times 4}) = 1$ , folgt aus der Stetigkeit, dass  $\det(\varphi(A(t))) = 1$  für alle  $t$  und damit insbesondere für  $t = 1$ .

5. Überprüfen der Homomorphismuseigenschaft

$$\text{Z. z: } \varphi(A_2 A_1) = \varphi(A_2) \varphi(A_1).$$

$$X \mapsto A_1 X A_1^\dagger \mapsto A_2 (A_1 X A_1^\dagger) A_2^\dagger = A_2 A_1 X A_1^\dagger A_2^\dagger = (A_2 A_1) X (A_2 A_1)^\dagger.$$

6. Epimorphismus, d. h.  $\varphi$  surjektiv, d. h.  $L_+^\dagger = \varphi(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$

Es sei  $A$  zunächst ein Element der Untergruppe  $\mathrm{SU}(2)$  von  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , d. h.

$$AA^\dagger = \mathbb{1}_{2 \times 2}.$$

Für  $X = x_0 \mathbb{1}_{2 \times 2}$  gilt

$$AXA^\dagger = x_0 A \mathbb{1}_{2 \times 2} A^\dagger = x_0 \mathbb{1}_{2 \times 2},$$

d. h.

$$\varphi(A)t = t \quad \text{mit} \quad t = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \varphi(A)$  ist ein Element der kleinen Gruppe von  $t$  (siehe 1.2.20). Laut Übung 2, Aufgabe 2. sind dies aber gerade die Drehungen aus  $\mathrm{SO}(3)$ .

Wir betrachten nun (siehe Übung 5, Aufgabe 2.)

$$U_j(\theta) := \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma_j\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbb{1}_{2 \times 2} - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sigma_j.$$

Behauptung:  $\varphi(U_j(\theta))$  ist eine eigentliche Drehung um die  $j$ -Achse mit Drehwinkel  $\theta$ .

Dazu berechnen wir (hier keine Einstein'sche Summenkonvention!)

$$U_j(\theta) X U_j^\dagger(\theta) = \underbrace{U_j(\theta) U_j^\dagger(\theta)}_{\mathbb{1}_{2 \times 2}} X + U_j(\theta) [X, U_j^\dagger(\theta)].$$

Wir bestimmen

$$\begin{aligned} [X, U_j^\dagger(\theta)] &= \left[ x_0 \mathbb{1}_{2 \times 2} + \sum_{k=1}^3 x_k \sigma_k, \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbb{1}_{2 \times 2} + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sigma_j \right] \\ &= i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \sum_{k=1}^3 x_k \sigma_k, \sigma_j \right] \\ &= -2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{kjl} x_k \sigma_l = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} x_k \sigma_l. \end{aligned}$$

Desweiteren

$$\begin{aligned}
U_j(\theta)[X, U_j^\dagger(\theta)] &= 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} x_k \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sigma_l - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \underbrace{\sigma_j \sigma_l}_{\delta_{jl} \mathbb{1}_{2 \times 2} + i \sum_{m=1}^3 \epsilon_{jlm} \sigma_m} \right] \\
&= \underbrace{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{\sin(\theta)} \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} x_k \sigma_l - 2i \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sum_{k,l=1}^3 \underbrace{\epsilon_{jkl} \delta_{jl}}_0 x_k \mathbb{1}_{2 \times 2} \\
&\quad + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \underbrace{\sum_{k,l,m=1}^3 \epsilon_{jkl} \epsilon_{jlm} x_k \sigma_m}_{\sum_{k,m=1}^3 (\delta_{jm} \delta_{kj} - \delta_{jj} \delta_{km}) x_k \sigma_m} \\
&= \sin(\theta) \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} x_k \sigma_l + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (x_j \sigma_j - \vec{x} \cdot \vec{\sigma})
\end{aligned}$$

mit

$$\vec{x} \cdot \vec{\sigma} = \sum_{i=1}^3 x_i \sigma_i.$$

Damit erhalten wir

$$U_j(\theta) X U_j^\dagger(\theta) = X + \sin(\theta) \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} x_k \sigma_l + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (x_j \sigma_j - \vec{x} \cdot \vec{\sigma}).$$

Wir betrachten nun  $j = 3$  und verwenden  $1 - 2 \sin^2(\theta/2) = \cos(\theta)$ :

$$\begin{aligned}
X &= x_0 \mathbb{1}_{2 \times 2} + \vec{x} \cdot \vec{\sigma} \\
\mapsto U_3(\theta) X U_3^\dagger(\theta) &= X + \sin(\theta)(x_1 \sigma_2 - x_2 \sigma_1) - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2) \\
&= x_0 \mathbb{1}_{2 \times 2} + [\cos(\theta)x_1 - \sin(\theta)x_2] \sigma_1 + [\sin(\theta)x_1 + \cos(\theta)x_2] \sigma_2 + x_3 \sigma_3.
\end{aligned}$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned}
x_0 &\mapsto x_0, \\
x_1 &\mapsto \cos(\theta)x_1 - \sin(\theta)x_2, \\
x_2 &\mapsto \sin(\theta)x_1 + \cos(\theta)x_2, \\
x_3 &\mapsto x_3,
\end{aligned}$$

was gerade einer aktiven Drehung um die 3-Achse mit Drehwinkel  $\theta$  entspricht. Die Fälle  $j = 1, 2$  diskutiert man analog.

Jedes  $R \in \text{SO}(3)$  lässt sich in drei aufeinanderfolgende Drehungen zerlegen (Parametrisierung durch Euler-Winkel)

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_{\hat{v}_3}(\gamma) R_{\hat{u}_2}(\beta) R_{\hat{e}_3}(\alpha), \quad 0 \leq \alpha, \gamma < 2\pi, 0 \leq \beta \leq \pi.$$

Die einzelnen Drehungen lassen sich jeweils als Abbildungen einer Orthonormalbasis (ONB) auf eine gleichorientierte neue ONB interpretieren.

- $R_{\hat{e}_3}(\alpha)$  beschreibt aktive Drehung um  $\hat{e}_3$  mit Drehwinkel  $\alpha$ :

$$\hat{u}_j = R_{\hat{e}_3}(\alpha)\hat{e}_j.$$

(Winkel  $\alpha$  ist so gewählt, dass  $\hat{u}_2$  sowohl auf  $\hat{e}_3$  als auch auf  $\hat{w}_3$  senkrecht steht. Sind  $\hat{e}_3$  und  $\hat{w}_3$  linear abhängig, so setzt man  $\alpha = 0$ .)

- $R_{\hat{u}_2}(\beta)$  beschreibt aktive Drehung um  $\hat{u}_2$  (neue 2-Achse) mit Drehwinkel  $\beta$ :

$$\hat{v}_j = R_{\hat{u}_2}(\beta)\hat{u}_j.$$

- $R_{\hat{v}_3}(\gamma)$  beschreibt aktive Drehung um  $\hat{v}_3$  (neue 3-Achse nach zwei Drehungen) mit Drehwinkel  $\gamma$ :

$$\hat{w}_j = R_{\hat{v}_3}(\gamma)\hat{v}_j.$$

- Kombiniert:

$$\begin{aligned}\hat{w}_j &= R_{\hat{v}_3}(\gamma)\hat{v}_j \\ &= R_{\hat{v}_3}(\gamma)R_{\hat{u}_2}(\beta)\hat{u}_j \\ &= R_{\hat{v}_3}(\gamma)R_{\hat{u}_2}(\beta)R_{\hat{e}_3}(\alpha)\hat{e}_j \\ &= R(\alpha, \beta, \gamma)\hat{e}_j.\end{aligned}$$

- Anmerkung: Dies ist die in der QM übliche Konvention. In der klassischen Mechanik erfolgt die zweite Drehung um  $\hat{u}_1$ .

Die kombinierte Drehung lässt sich auch als drei aufeinanderfolgende Drehungen ausschließlich um die Achsen  $\hat{e}_2$  und  $\hat{e}_3$  ausdrücken (siehe Übung 5, Aufgabe 3.):

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_3(\alpha)R_2(\beta)R_3(\gamma), \quad 0 \leq \alpha, \gamma < 2\pi, 0 \leq \beta \leq \pi,$$

wobei wir jetzt verkürzt  $j$  für  $\hat{e}_j$  geschrieben haben.

Da jede Drehung aus  $L_+^\uparrow$  sich als

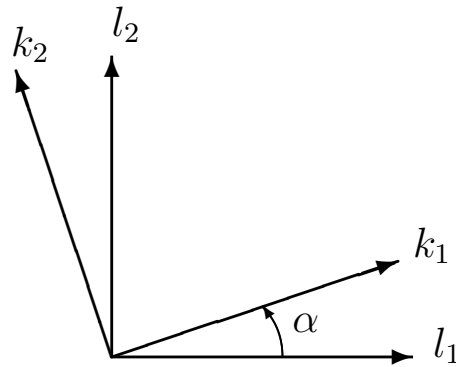
$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_3(\alpha)\mathcal{R}_2(\beta)\mathcal{R}_3(\gamma)$$

schreiben lässt, erreichen wir mit

$$A = U_3(\alpha)U_2(\beta)U_3(\gamma)$$

die zu  $SO(3)$  isomorphe Untergruppe von  $L_+^\uparrow$ .

- Illustration zur Begriffsbildung aktive/passive Drehung



Betrachte eine Drehung (um die  $z$ -Achse), mit der die Einheitsvektoren  $\hat{l}_1$  und  $\hat{l}_2$  ( $l$  für Laborsystem) auf  $\hat{k}_1$  und  $\hat{k}_2$  ( $k$  für körperfestes System) abgebildet werden:

$$\begin{aligned}\hat{k}_1 &= R(\alpha)\hat{l}_1 = \cos(\alpha)\hat{l}_1 + \sin(\alpha)\hat{l}_2, \\ \hat{k}_2 &= R(\alpha)\hat{l}_2 = -\sin(\alpha)\hat{l}_1 + \cos(\alpha)\hat{l}_2.\end{aligned}$$

In der *aktiven* Sichtweise verbinden wir mit der Drehung eine Drehmatrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

die den Vektor  $\vec{x} = x_1\hat{l}_1 + x_2\hat{l}_2$  auf  $\vec{y} = y_1\hat{l}_1 + y_2\hat{l}_2$  abbildet mit

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

In der aktiven Sichtweise wird das physikalische Objekt gedreht.

In der *passiven* Sichtweise drehen wir das Koordinatensystem und fragen nach den Komponenten eines gegebenen Vektors  $\vec{x} = x_1\hat{l}_1 + x_2\hat{l}_2 = z_1\hat{k}_1 + z_2\hat{k}_2$  bzgl. der ONB des gedrehten (körperfesten) Systems ausgedrückt durch die Koordinaten des Laborsystems:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

In der passiven Sichtweise bleibt das physikalische Objekt fest und das Koordinatensystem wird gedreht.

Wir betrachten nun

$$M(r) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}, \quad r > 0.$$

Der Fall  $r < 0$  wird durch die (noch zu beweisende)  $2 \rightarrow 1$ -Eigenschaft des Epimorphismus abgedeckt. Es gilt  $M(r) = M^\dagger(r)$ . Wir finden

$$\begin{aligned} X' = M(r)XM^\dagger(r) &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(x_0 + x_3) & r^{-1}(x_1 - ix_2) \\ r(x_1 + ix_2) & r^{-1}(x_0 - x_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r^2(x_0 + x_3) & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & r^{-2}(x_0 - x_3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das entspricht

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1, \\ x'_2 &= x_2, \\ x'_0 &= \frac{1}{2}\text{Tr}(X') = \frac{1}{2}r^2(x_0 + x_3) + \frac{1}{2}r^{-2}(x_0 - x_3) \\ &= \frac{1}{2}(r^2 + r^{-2})x_0 + \frac{1}{2}(r^2 - r^{-2})x_3, \\ x'_3 &= \frac{1}{2}\text{Tr}(\sigma_3 X') = \frac{1}{2}r^2(x_0 + x_3) - \frac{1}{2}r^{-2}(x_0 - x_3) \\ &= \frac{1}{2}(r^2 - r^{-2})x_0 + \frac{1}{2}(r^2 + r^{-2})x_3. \end{aligned}$$

Wir setzen nun  $r^2 = e^\lambda$ , so dass  $M(r)$  eine spezielle Lorentz-Transformation entlang der  $z$ -Achse impliziert. Zur Erinnerung:

$$L(\beta\hat{e}_z) = \begin{pmatrix} \cosh(\lambda) & 0 & 0 & \sinh(\lambda) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\lambda) & 0 & 0 & \cosh(\lambda) \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \gamma = \cosh(\lambda) &= \frac{1}{2}(r^2 + r^{-2}) \geq 1, \\ -\infty < \beta\gamma = \sinh(\lambda) &= \frac{1}{2}(r^2 - r^{-2}) < \infty, \\ -1 < \beta = \tanh(\lambda) &= \frac{r^2 - r^{-2}}{r^2 + r^{-2}} < 1. \end{aligned}$$

Insbesondere

$$\begin{aligned} 0 < r \leq 1 &\Leftrightarrow -\infty < \sinh(\lambda) \leq 0 \Leftrightarrow -1 < \beta \leq 0, \\ 1 \leq r < \infty &\Leftrightarrow 0 \leq \sinh(\lambda) < \infty \Leftrightarrow 0 \leq \beta < 1. \end{aligned}$$

Wir benutzen nun 3. von 1.2.20: Jede eigentliche, orthochrone Lorentz-Transformation lässt sich in der Form

$$\Lambda = \mathcal{R}(\alpha, \beta, 0)L(v\hat{e}_z)\mathcal{R}^{-1}(\Phi, \Theta, \Psi)$$



schreiben. Setze

$$A = U_3(\alpha)U_2(\beta)M(r)U_3^{-1}(\Psi)U_2^{-1}(\Theta)U_3^{-1}(\Phi).$$

$\Rightarrow \varphi$  ist ein Epimorphismus.

### 7. Surjektiv $2 \rightarrow 1$

Vorbemerkung: Es genügt  $\text{Kern}(\varphi)$  zu bestimmen.

Sei  $g \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  mit  $\varphi(g) = \Lambda$ .

- (a)  $g' \in g\text{Kern}(\varphi)$ .  $\Rightarrow g' = g\tilde{g}$  mit  $\tilde{g} \in \text{Kern}(\varphi)$ .  $\Rightarrow \varphi(g') = \varphi(g\tilde{g}) = \varphi(g)\varphi(\tilde{g}) = \varphi(g) = \Lambda$ .
- (b)  $g' \notin g\text{Kern}(\varphi)$ .  $\Rightarrow g^{-1}g' \notin \text{Kern}(\varphi)$ .  $\Rightarrow \mathbb{1}_{4 \times 4} \neq \varphi(g^{-1}g') = \varphi(g^{-1})\varphi(g') = \Lambda^{-1}\Lambda' \Rightarrow \Lambda' \neq \Lambda$ .

Wir bestimmen  $\text{Kern}(\varphi)$ :

$$\text{Kern}(\varphi) = \{A \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \mid AXA^\dagger = X \ \forall X \in \mathcal{H}(2)\}.$$

Wir setzen insbesondere  $X = \mathbb{1}_{2 \times 2}$ .  $\Rightarrow A^\dagger = A^{-1}$ .  $\Rightarrow A \in \text{SU}(2)$ .

$$\Rightarrow AX = XA \ \forall X \in \mathcal{H}(2).$$

Sei  $X = \vec{x} \cdot \vec{\sigma}$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$  beliebig.  $\Rightarrow [A, \sigma_i] = 0$ .  $\Rightarrow A = a_0 \mathbb{1}_{2 \times 2}$  mit  $a_0^2 = 1$ .

$$\Rightarrow \text{Kern}(\varphi) = \{\mathbb{1}_{2 \times 2}, -\mathbb{1}_{2 \times 2}\}.$$

### Beispiel 1.4.3 Spezialfall: Zusammenhang zwischen $\text{SU}(2)$ und $\text{SO}(3)$ .

Es existiert ein  $(2 \rightarrow 1)$ -Epimorphismus

$$\varphi : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3) \text{ mit } U \mapsto \varphi(U), \text{ wobei } \varphi_{ij}(U) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_i U \sigma_j U^\dagger),$$

wobei  $\pm U \in \text{SU}(2)$  dasselbe Bild  $\varphi(U) \in \text{SO}(3)$  besitzen.

Beweis: Einschränkung des vorherigen Beispiels auf die Gruppen  $\text{SU}(2) < \text{SL}(2, \mathbb{C})$  und die zu  $\text{SO}(3)$  isomorphe kleine Gruppe von  $t = (1, 0, 0, 0)^T$  als Untergruppe von  $L_+^\uparrow$ .

- \* Geometrische Darstellung des Epimorphismus  $\varphi : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$ .

Ein Element aus  $\text{SO}(3)$  ( $\text{SU}(2)$ ) kann durch einen Drehvektor  $\vec{\alpha} = OP$  mit Drehachse  $\hat{n}$  und Drehwinkel  $0 \leq \theta < 2\pi$  ( $4\pi$ ) charakterisiert werden. Da eine Drehung um  $\hat{n}$  mit  $0 \leq \theta < 2\pi$  dasselbe ist wie eine Drehung um  $-\hat{n}$  mit  $2\pi - \theta$ , betrachten wir für  $\text{SO}(3)$  nur Drehachsen in der oberen Hemisphäre:  $\text{SO}(3)$  entspricht also dem Inneren der oberen Halbkugel vom Radius  $2\pi$ . (Genau genommen muss auch noch das Innere eines Halbkreises ausgeschlossen werden).

Analog könnten wir uns für  $\text{SU}(2)$  auf eine Halbkugel mit Radius  $4\pi$  beschränken. Statt dessen zeigen wir, dass  $\text{SU}(2)$  sich als Inneres der gesamten Kugel mit Radius  $2\pi$  interpretieren lässt.

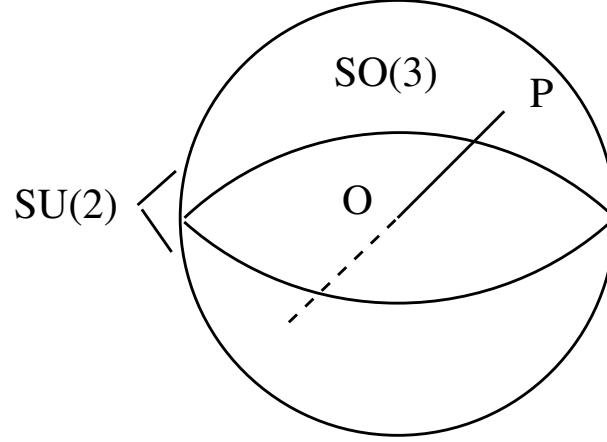


Abbildung 1.3: Geometrische Darstellung des Zusammenhangs zwischen SU(2) und SO(3). Erklärung siehe Text.

- (a) Für Winkel  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  benutzen wir die obere Halbkugel mit Radius  $2\pi$ .
- (b) Für Winkel  $2\pi < \theta < 4\pi$  benutzt man

$$\begin{aligned}
 U_{\hat{n}}(\theta) &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
 &= \cos\left(\frac{-\theta}{2}\right) - i\vec{\sigma} \cdot (-\hat{n}) \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) \\
 &= \cos\left(2\pi - \frac{\theta}{2}\right) - i\vec{\sigma} \cdot (-\hat{n}) \sin\left(2\pi - \frac{\theta}{2}\right) \\
 &= U_{-\hat{n}}(4\pi - \theta),
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

wobei  $0 < 4\pi - \theta < 2\pi$  (siehe Abbildung 1.4).

- (c) Außerdem: Für  $2\pi \leq \theta = 2\pi + \varphi < 4\pi$ :

$$\begin{aligned}
 U_{\hat{n}}(\theta) &= \cos\left(\pi + \frac{\varphi}{2}\right) - i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sin\left(\pi + \frac{\varphi}{2}\right) \\
 &= -\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \\
 &= -U_{\hat{n}}(\varphi) \stackrel{(1.8)}{=} U_{-\hat{n}}(2\pi - \varphi).
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

(Wir haben  $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$  und  $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$  benutzt.)

Den Paaren  $\{U_{\hat{n}}(\theta), -U_{\hat{n}}(\theta)\} = \{U_{\hat{n}}(\theta), U_{-\hat{n}}(2\pi - \theta)\}$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $\hat{n}$  aus der oberen Halbkugel), d. h. gegenüberliegenden Punkten der SU(2)-Sphäre mit Radien  $(\theta, 2\pi - \theta)$ , wird unter dem Epimorphismus ein Punkt der SO(3)-Hemisphäre zugeordnet.

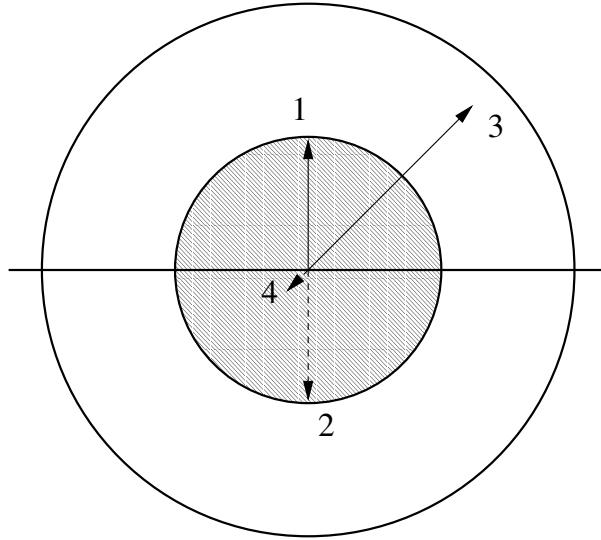


Abbildung 1.4: Zweidimensionale Illustration von Gl. (1.8):  $\theta = 2\pi : 1 \mapsto 2$ .  
 $\theta > 2\pi : 3 \mapsto 4$ .

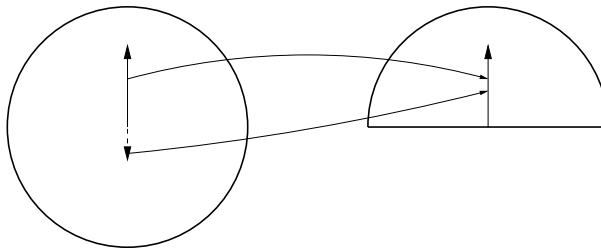


Abbildung 1.5: Zweidimensionale Illustration von  $(U_{\hat{n}}(\theta), -U_{\hat{n}}(\theta)) = (U_{\hat{n}}(\theta), U_{-\hat{n}}(2\pi - \theta)) \mapsto R_{\hat{n}}(\theta)$ .

**1.4.4** Aufgrund der obigen Epimorphismen werden  $SU(2)$  und  $SL(2, \mathbb{C})$  auch als (universelle) Überlagerungsgruppen von  $SO(3)$  und  $L_+^\uparrow$  bezeichnet.

**Satz 1.4.5** Sei  $\varphi$  ein Homomorphismus von  $G$  in  $G'$ .  $\text{Kern}(\varphi)$  ist Normalteiler von  $G$ .

Begründung:  $\text{Kern}(\varphi) \neq \emptyset$ , da  $e \in \text{Kern}(\varphi)$ . Wir zeigen die Abgeschlossenheit. Es seien  $g_1$  und  $g_2$  aus  $\text{Kern}(\varphi)$ , d. h.  $\varphi(g_i) = e'$ . Betrachte

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2) = e' e' = e' \quad \Rightarrow \quad g_1 g_2 \in \text{Kern}(\varphi).$$

Rest, siehe Übung 6, Aufgabe 1.

**Satz 1.4.6 Homomorphiesatz.** Sei  $\varphi$  ein Homomorphismus von  $G$  in  $G'$ . Dann ist

$$\Phi : G/\text{Kern}(\varphi) \rightarrow G' \quad \text{mit} \quad \Phi(g\text{Kern}(\varphi)) = \varphi(g)$$

ein injektiver Homomorphismus. Einschränkung auf  $\varphi(G)$ : Surjektiv  $\Rightarrow$  Isomorphismus

$$G/\text{Kern}(\varphi) \cong \varphi(G).$$

Beweis: Sei  $H = \text{Kern}(\varphi)$ . Wegen 1.4.5 gilt  $H \trianglelefteq G$ .

- Homomorphismus: Sei  $g_i H \in G/H$ .

$$\Phi(g_1 H g_2 H) = \Phi(g_1 g_2 H) = \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2) = \Phi(g_1 H) \Phi(g_2 H).$$

$\Rightarrow \Phi$  Homomorphismus.

- Injektiv: Z. z.  $\Phi(g_1 H) = \Phi(g_2 H) \Rightarrow g_1 H = g_2 H$ .

$$\Phi(g_1 H) = \Phi(g_2 H) \Leftrightarrow \varphi(g_1) = \varphi(g_2).$$

$$\text{Multipliziere von links mit } (\varphi(g_1))^{-1} = \varphi(g_1^{-1}).$$

$$\Rightarrow e' = \varphi(g_1^{-1}) \varphi(g_2) = \varphi(g_1^{-1} g_2).$$

$$\Rightarrow g_1^{-1} g_2 = h \in H. \Rightarrow g_2 = g_1 h \Rightarrow g_2 H = g_1 H.$$

**Beispiele 1.4.7 zum Homomorphiesatz.**

1. Sei  $G = O(3)$  und  $G' = SO(3)$ . Definiere

$$\varphi : G \rightarrow G' \quad \text{mit} \quad \varphi(g) = g \det(g).$$

$\varphi$  ist ein  $(2 \rightarrow 1)$ -Epimorphismus. Denn:

- (a) Z. z.:  $\varphi(g) \in SO(3)$

$$\varphi^T(g) \varphi(g) = \det(g^T) \det(g) g^T g = \mathbb{1}_{3 \times 3} \Rightarrow \varphi(g) \in O(3),$$

$$\det[\varphi(g)] = \det[g \det(g)] = (\pm 1)(\pm 1)^3 = 1,$$

$$\Rightarrow \varphi(g) \in SO(3).$$

Surjektiv: Wähle  $g \in SO(3)$ .

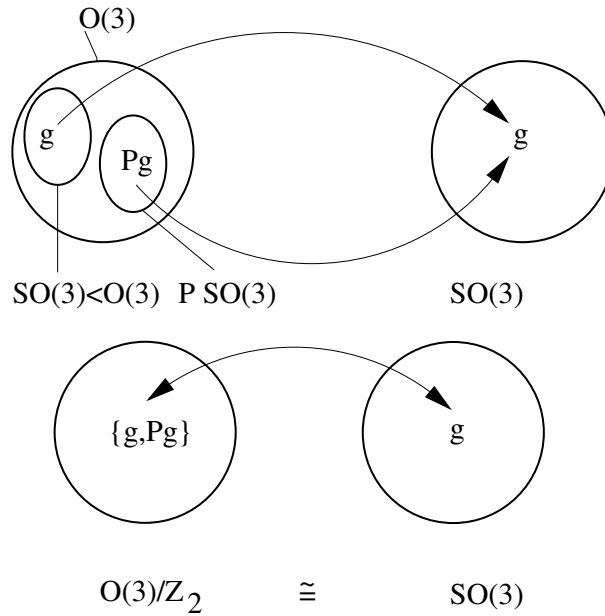


Abbildung 1.6: Zusammenhang zwischen  $O(3)$  und  $SO(3)$ .

(b) Homomorphismeigenschaft

$$\varphi(g_1 g_2) = g_1 g_2 \det(g_1 g_2) = g_1 g_2 \det(g_1) \det(g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2).$$

(c)  $2 \rightarrow 1$

$$\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \Rightarrow g_1 = \pm g_2, \text{ denn:}$$

$$g_1 \det(g_1) = g_2 \det(g_2) \Rightarrow g_1 = \underbrace{\frac{\det(g_2)}{\det(g_1)}}_{\pm 1} g_2.$$

$$\text{Insbesondere } \text{Kern}(\varphi) = \{\mathbb{1}_{3 \times 3}, -\mathbb{1}_{3 \times 3}\} =: Z_2$$

$$\Phi : O(3)/Z_2 \rightarrow SO(3) \quad \text{mit} \quad \{g, -g\} \mapsto g \det(g)$$

definiert Isomorphismus, d. h.  $O(3)/Z_2 \cong SO(3)$  (siehe Abbildung 1.6).

2. Anwendung des Homomorphiesatzes 1.4.6 auf den Homomorphismus  $\varphi : SU(2) \rightarrow SO(3)$  aus Beispiel 1.4.3.

$$\text{Kern}(\varphi) = \{\mathbb{1}_{2 \times 2}, -\mathbb{1}_{2 \times 2}\} := Z. \quad 1.4.6 \Rightarrow$$

$$SU(2)/Z \cong SO(3),$$

$$SU(2)/Z \ni \{U, -U\} \mapsto \varphi(U) \in SO(3).$$

Z. B. (siehe Übung 5, Aufgabe 2.)

$$\{U_3(\gamma), \underbrace{U_3(2\pi + \gamma)}_{-U_3(\gamma)}\} \mapsto R_3(\gamma).$$

3. Beachte: Obwohl

$$\mathrm{O}(3)/\mathbb{Z}_2 \cong \mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z},$$

ist  $\mathrm{O}(3)$  *nicht* isomorph zu  $\mathrm{SU}(2)$ .

# Kapitel 2

## Darstellungen und Realisierungen von Gruppen

### 2.1 Definition von Darstellungen mit Beispielen

Darstellungen sind Realisierungen von Gruppen als bijektive, lineare Operatoren auf  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen.

Sei  $V$  ein linearer Raum. Unter der allgemeinen, linearen Gruppe über dem Vektorraum  $V$  versteht man

$$\mathrm{GL}(V) := \{A \mid A \text{ bijektiver, linearer Operator auf } V\}$$

(„auf  $V$ “ heißt  $A : V \rightarrow V$ , bijektiv:  $A^{-1}$  existiert).

Anschauliche Interpretation für  $n$ -dim.  $V$ : Invertierbare  $(n, n)$ -Matrizen.

**Definition 2.1.1** Unter einer **Darstellung  $\varphi$  der Gruppe  $G$  auf dem Vektorraum  $V$**  versteht man einen Homomorphismus

$$\varphi : G \rightarrow \mathrm{GL}(V), \quad g \mapsto \varphi(g) : V \rightarrow V$$

mit

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

(Überzeugen Sie sich davon, dass  $\mathrm{GL}(V)$  eine Gruppe bildet.)

1.  $V$  heißt **Trägerraum** der Darstellung.
2.  $\dim(V)$ : **Dimension** der Darstellung  $\varphi$ .
3. Eine Darstellung  $\varphi$  heißt genau dann **treu**, wenn  $\varphi$  injektiv ist.
4. Im Sinne von Definition 1.3.1 ist eine Darstellung eine Operation der Gruppe  $G$  auf einem  $\mathbb{K}$ -VR in Form bijektiver, linearer Operatoren.

**Beispiele 2.1.2** 1. Die Elemente von  $SO(3)$ , interpretiert als lineare Operatoren auf  $\mathbb{R}^3$ , bilden eine treue Darstellung von  $SO(3)$ .

2. Die Elemente von  $SO(3)$ , interpretiert als lineare Operatoren auf  $\mathbb{R}^3$ , bilden eine nichttreue Darstellung von  $SU(2)$  (siehe Beispiel 1.4.3; nicht injektiv, da  $\pm U \mapsto \varphi(U)$ ).

3. 4-dimensionale Darstellung von  $SO(3)$  (Trägerraum  $\mathbb{R}^4$ ):

$$SO(3) \ni R \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

4.  $2n$ -dimensionale Darstellung von  $SU(2)$  (Trägerraum  $\mathbb{C}^{2n}$ ):

$$SU(2) \ni U \mapsto \begin{pmatrix} U & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & U \end{pmatrix}.$$

5. Beispiel aus der Quantenmechanik. Sei  $H$  der Hamilton-Operator eines (spinlosen) Teilchens der Masse  $m$  in einem Zentralpotential  $V(r)$  (bzgl. einer ausführlichen Diskussion, siehe F. Scheck, Theoretische Physik 2, Springer, Berlin 2000, Kapitel 1.9):

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r),$$

d. h.  $H$  ist drehinvariant. Sei  $\psi(\vec{x})$  ein Eigenzustand von  $H$ . Wir betrachten eine (aktive) Drehung

$$x'_i = R_{ij}x_j$$

und fordern für den „gedrehten“ Zustand

$$\psi'(\vec{x}') = \psi(\vec{x}).$$

(Wir betrachten eine „gedrehte“ Versuchsanordnung und fordern wegen der Isotropie des Raumes, dass mit der ursprünglichen und der gedrehten Versuchsanordnung übereinstimmende Versuchsergebnisse erzielt werden. Die Wellenfunktion eines gedrehten Zustands soll am Punkt  $\vec{x}'$  denselben Wert haben wie die Wellenfunktion des ungedrehten Zustands am Ort  $\vec{x}$ . Im Prinzip ist auch noch ein von der Drehmatrix abhängiger Phasenfaktor  $\exp[i\Theta(R)]$  denkbar.) Wir assoziieren mit  $R$  einen linearen Operator  $D(R)$ , dergestalt dass

$$\psi'(\vec{x}') = D(R)\psi(\vec{x}') = \psi(\vec{x}) = \psi(R^{-1}\vec{x}') \quad \forall \vec{x}'.$$



Wir betrachten eine infinitesimale Drehung um die Drehachse  $\hat{n}$  mit Drehwinkel  $\epsilon$ ,

$$\vec{x}' = \vec{x} + \epsilon \hat{n} \times \vec{x}$$

und damit

$$\vec{x} = \vec{x}' - \epsilon \hat{n} \times \vec{x}',$$

so dass

$$\begin{aligned} D(R)\psi(\vec{x}') &= \psi(\vec{x}' - \epsilon \hat{n} \times \vec{x}') \\ &= \psi(\vec{x}') - \epsilon \underbrace{\hat{n} \times \vec{x}' \cdot \vec{\nabla}'}_{i\vec{x}' \times \frac{\vec{\nabla}'}{i} \cdot \hat{n}} \psi(\vec{x}') \\ &= (1 - i\epsilon \hat{n} \cdot \vec{l})\psi(\vec{x}') \end{aligned}$$

mit dem Drehimpulsoperator  $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$  (natürliche Einheiten).

Übergang zu endlicher Drehung mittels  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a/n)^n = \exp(a)$ :

$$D(R) = \exp(-i\vec{\omega} \cdot \vec{l}) = \underbrace{\exp(-i\alpha l_z) \exp(-i\beta l_y) \exp(-i\gamma l_z)}_{\mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma)}.$$

Charakterisierung der Drehung durch einen Drehvektor  $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$  in Richtung der Drehachse  $\hat{n}$  und mit der Länge des Drehwinkels  $\omega$  oder durch die drei Euler-Winkel.

Sprechweise: Die Drehung  $R$  induziert eine Transformation der Eigenzustände von  $H$  auf dem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$ .

Wir überprüfen die Homomorphismeigenschaft.

Sei  $R_3 = R_2 R_1$ ,  $\vec{x} = R_1^{-1} R_2^{-1} \vec{x}''$ :

$$\begin{aligned} \psi''(\vec{x}'') &= D(R_3)\psi(\vec{x}'') = \psi(R_3^{-1}\vec{x}'') = \psi(\underbrace{R_1^{-1} R_2^{-1} \vec{x}''}_{R_1^{-1}(R_2^{-1}\vec{x}'')}) \\ &= D(R_1)\psi(R_2^{-1}\vec{x}'') = D(R_2)D(R_1)\psi(\vec{x}''), \end{aligned}$$

oder nach Umbenennung der Variablen  $\vec{x}'' \rightarrow \vec{x}$ :

$$D(R_3)\psi(\vec{x}) = D(R_2)D(R_1)\psi(\vec{x}).$$

Der Homomorphismus

$$\varphi : \text{SO}(3) \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H}), \quad \varphi(R(\alpha, \beta, \gamma)) = \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma)$$

ist eine treue, unendlichdimensionale Darstellung von  $\text{SO}(3)$ .

Zerlegung von  $\mathcal{H}$ :

Wir kennzeichnen die Eigenzustände von  $H$  mit  $(n, l, m)$ .

(a) Wasserstoffatom:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}.$$

---

Internationales System (SI):

– Reduzierte Planck'sche Konstante:

$$\hbar = 1.054\,571\,68(18) \times 10^{-34} \text{ J s},$$

$$1 \text{ J} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$$

– Elektronmasse:

$$m_e = 9.109\,3826(16) \times 10^{-31} \text{ kg}$$

– Elementarladung:

$$e = 1.602\,176\,53(14) \times 10^{-19} \text{ C},$$

$$1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$$

– Influenzkonstante:

$$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) = 8.854\,187\,817 \dots \times 10^{-12} \text{ C V}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J / C}$$

– Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$$

– Typische Längenskala der subatomaren Physik:

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$$

– Einheit für Wirkungsquerschnitte:

$$1 \text{ barn} = 10^2 \text{ fm}^2$$

System der natürlichen Einheiten:

– Setze  $\hbar = c = 1 = \epsilon_0 = \mu_0$

– Feinstrukturkonstante:

$$\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137.035\,999\,11(46) \rightarrow e^2/(4\pi) (\approx \frac{1}{137})$$

– Konversionskonstante:

$$\hbar c = 197.326\,968(17) \text{ MeV fm} \rightarrow 1$$

Damit lassen sich Energien durch inverse Längen und umgekehrt ausdrücken.

–  $m_e = 0.510\,998\,918(44) \text{ MeV}/c^2 \rightarrow m_e \approx 0.511 \text{ MeV}$

Übergang:

$$H = -\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \rightarrow -\frac{\Delta}{2m} - \frac{\alpha}{r}.$$

---

Es gilt:

$$E_n = -\frac{\alpha^2 m}{2n^2} \approx -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}.$$

–  $n = n' + l + 1$ : Hauptquantenzahl.

–  $n' \geq 0$ : Anzahl der Knoten in der Radialwellenfunktion (Mögliche Nullstelle für  $r = 0$  und asymptotische Nullstelle *nicht* mitgezählt).

–  $l \in \mathbb{N}_0$ .

(b) Dreidimensionaler harmonischer Oszillator oder Kugeloszillator:

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2.$$

Es gilt:

$$E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right)\omega.$$

–  $n = 2n' + l$ : Hauptquantenzahl.

–  $n' \geq 0$ : Anzahl der Knoten in der Radialwellenfunktion (s. o.).

–  $l \in \mathbb{N}_0$ .

Vorsicht: Für den harmonischen Oszillator existieren verschiedene Konventionen in der Literatur.

Wir betrachten stellvertretend einen gebundenen Zustand  $|\psi\rangle = |n, l, m\rangle$  des Wasserstoffatoms. Das Spektrum des Wasserstoffatoms zerfällt in diskrete, gebundene Zustände,

$$\Psi_{nlm}(\vec{x}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\Theta, \Phi),$$

und Zustände mit einem Kontinuum positiver Energieeigenwerte  $E > 0$ ,

$$\Psi_{lm}(E, \vec{x}) = R_l(E, r)Y_{lm}(\Theta, \Phi),$$

wobei die Radialwellenfunktionen folgende Orthogonalitätsrelationen (bei gleichem  $l$ !) erfüllen:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr r^2 R_{nl}^*(r) R_{n'l}(r) &= \delta_{nn'}, \\ \int_0^\infty dr r^2 R_l^*(E, r) R_l(E', r) &= \delta(E - E'), \\ \int_0^\infty dr r^2 R_{nl}^*(r) R_l(E, r) &= 0. \end{aligned}$$

Die Vollständigkeitsrelation lautet

$$1 = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l |n, l, m\rangle \langle n, l, m|}_{\text{diskrete, gebundene Zustände}} + \underbrace{\int_0^\infty dE \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l |E, l, m\rangle \langle E, l, m|}_{\text{Kontinuum}}.$$

Betrachten wir die Drehimpulsoperatoren in der Ortsraumdarstellung in Kugelkoordinaten

$$x = r \sin(\Theta) \cos(\Phi), \quad y = r \sin(\Theta) \sin(\Phi), \quad z = r \cos(\Theta),$$

so sehen wir, dass diese nur auf den Winkelanteil wirken:

$$\begin{aligned} l_1 &= i \left[ \sin(\Phi) \frac{\partial}{\partial \Theta} + \cot(\Theta) \cos(\Phi) \frac{\partial}{\partial \Phi} \right], \\ l_2 &= i \left[ -\cos(\Phi) \frac{\partial}{\partial \Theta} + \cot(\Theta) \sin(\Phi) \frac{\partial}{\partial \Phi} \right], \\ l_3 &= -i \frac{\partial}{\partial \Phi}. \end{aligned}$$

Wir schreiben für den gedrehten Zustand mittels der Vollständigkeit

$$\begin{aligned} |\Psi'\rangle &= \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma)|n, l, m\rangle \\ &= \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{l'=0}^{n'-1} \sum_{m'=-l'}^{l'} |n', l', m'\rangle \underbrace{\langle n', l', m' | \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) | n, l, m \rangle}_{(A)} \\ &\quad + \int_0^{\infty} dE \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} |E, l', m'\rangle \underbrace{\langle E, l', m' | \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) | n, l, m \rangle}_{(B)} \end{aligned}$$

und betrachten die beiden Matrixelemente

$$\begin{aligned} (A) &= \int_0^{\infty} r^2 dr R_{n'l'}^*(r) R_{nl}(r) \underbrace{\langle l', m' | \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) | l, m \rangle}_{\delta_{l'l} D_{m'm}^{(l)*}(\alpha, \beta, \gamma)} \\ &= \delta_{l'l} D_{m'm}^{(l)*}(\alpha, \beta, \gamma) \underbrace{\int_0^{\infty} r^2 dr R_{n'l}^*(r) R_{nl}(r)}_{\delta_{n'n}} \\ &= \delta_{l'l} \delta_{n'n} D_{m'm}^{(l)*}(\alpha, \beta, \gamma), \\ (B) &= \delta_{l'l} D_{m'm}^{(l)*}(\alpha, \beta, \gamma) \underbrace{\int_0^{\infty} r^2 dr R_l^*(E, r) R_{nl}(r)}_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Begründung für  $\delta_{l'l}$ :

Aus  $[\vec{l}^2, l_i] = 0$  folgt  $[\vec{l}^2, \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma)] = 0. \Rightarrow$

$$\begin{aligned} l'(l'+1) \langle l', m' | \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) | l, m \rangle &= \langle l', m' | \vec{l}^2 \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) | l, m \rangle \\ &= \langle l', m' | \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) \vec{l}^2 | l, m \rangle \\ &= l(l+1) \langle l', m' | \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) | l, m \rangle. \\ \Rightarrow \underbrace{[l(l+1) - l'(l'+1)]}_{(l-l')(l+l'+1)} \langle l', m' | \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) | l, m \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Aus  $l+l'+1 \geq 1$  folgt für  $l \neq l'$ , dass  $\langle l', m' | \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) | l, m \rangle = 0$  und deshalb existiert nur ein Beitrag für  $l = l'$ .

Wir erhalten schließlich

$$|\Psi'\rangle = \sum_{m'=-l}^l D_{m'm}^{(l)*}(\alpha, \beta, \gamma) |n, l, m'\rangle$$

mit

$$D_{mm'}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle l, m | \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) | l, m' \rangle^*.$$

Vorsicht: Es existieren verschiedene Konventionen in der Literatur! Für die Kontinuumszustände verläuft die Rechnung analog.

Die  $(2l+1, 2l+1)$ -Matrizen  $D^{(l)}$  mit den Elementen  $D_{mm'}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma)$  bilden eine  $(2l+1)$ -dimensionale Darstellung der  $SO(3)$ . Der Trägerraum ist  $\text{LH}\{|l, m\rangle, m = -l, \dots, l\}$ . (Die Einträge der Matrizen werden auch als  $D$ - oder Kreiselfunktionen bezeichnet, da sie Eigenfunktionen des symmetrischen Kreisels sind.)

Bemerkung: Die **zufällige** Entartung für  $n \geq 2$  ist auf eine höhere Symmetrie des Systems zurückzuführen. Im Fall des Wasserstoffatoms ist dies  $SO(4)$ , für den harmonischen Oszillator  $SU(3)$ . Dagegen wird die allen Zentralpotentialen für ein gegebenes  $l$  gemeinsame  $(2l+1)$ -fache Entartung als **wesentliche** Entartung bezeichnet.

Für den harmonischen Oszillator lautet die Vollständigkeitsrelation in den Quantenzahlen  $\{n, l, m\}$ :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \sum_{m=-2l}^{2l} |2n, 2l, m\rangle \langle 2n, 2l, m| \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \sum_{m=-(2l+1)}^{2l+1} |2n+1, 2l+1, m\rangle \langle 2n+1, 2l+1, m|. \end{aligned}$$

In den Quantenzahlen  $\{n_r, l, m\}$  mit  $n = 2n_r + l$  lautet die Vollständigkeitsrelation:

$$1 = \sum_{n_r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l |n_r, l, m\rangle \langle n_r, l, m|.$$

## 2.2 Äquivalente Darstellungen, reduzible und irreduzible Darstellungen

**Definition 2.2.1** Zwei Darstellungen  $D_1$  und  $D_2$  einer Gruppe  $G$  auf Vektorräumen  $V_1$  und  $V_2$  sind äquivalent, wenn ein bijektiver Operator  $S : V_1 \rightarrow V_2$  existiert mit

$$SD_1(g)S^{-1} = D_2(g) \quad \forall g \in G.$$

Diese Definition liefert eine Äquivalenzrelation (siehe Übung 6, Aufgabe 5.) und damit laut Satz 1.3.10 eine Partition der Menge der Darstellungen von  $G$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} SD_1(g_1g_2)S^{-1} &= SD_1(g_1)D_1(g_2)S^{-1} = SD_1(g_1)S^{-1}SD_1(g_2)S^{-1} \\ &= D_2(g_1)D_2(g_2) = D_2(g_1g_2). \end{aligned}$$

Einfaches Beispiel:  $V_1 = V_2 = V$ , Basiswechsel.

Sei  $V$  ein Vektorraum. Ein Unterraum  $U$  von  $V$  heißt invariant bzgl. eines linearen Operators  $T$ , falls  $Tu \in U \forall u \in U$ .

**Definition 2.2.2** Sei  $D$  eine Darstellung einer Gruppe  $G$  auf einem Vektorraum  $V$ .

- Ein Unterraum  $U$  von  $V$  heißt **invariant bzgl.  $D$** , falls

$$D(g)u \in U \forall u \in U \wedge \forall g \in G.$$

- Eine Darstellung  $D$  auf  $V$  heißt **reduzibel**, wenn ein bzgl.  $D$  invarianter Unterraum  $U$  von  $V$  existiert mit  $U \neq \{0\}$  und  $U \neq V$ .

**Beispiel 2.2.3 mit Satz.** Sei  $D$  eine  $n$ -dimensionale reduzible Darstellung von  $G$  auf  $V$  und  $U$  ein bzgl.  $D$  invarianter  $m$ -dimensionaler Unterraum von  $V$ .

$D$  reduzibel  $\Leftrightarrow D(g)$  ist in einer geeigneten aber festen Basis von der Form (oder besser  $D$  ist äquivalent zu einer Darstellung der Form)

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & \alpha(g) \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}, \quad 0 = 0_{(n-m) \times m}, \quad (2.1)$$

mit

- $D_1(g)$ :  $m$ -dimensionale Darstellung ( $(m, m)$ -Matrix), beschreibt  $U \rightarrow U$ ;
- $\alpha(g)$ :  $(m, n - m)$ -Matrix, beschreibt  $V \setminus U \rightarrow U$ ;
- $D_2(g)$ :  $(n - m)$ -dimensionale Darstellung ( $(n - m, n - m)$ -Matrix), beschreibt  $V \setminus U \rightarrow V \setminus U$ .

Begründung:

„ $\Rightarrow$ “:

Wähle eine Basis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  von  $V$ , wobei  $e_1, \dots, e_m$   $U$  aufspannen.  $\Rightarrow$

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & \alpha(g) \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}$$

Anschaulich:

$$V \ni v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

mit

$$D(g)v = \begin{pmatrix} D_1(g) & \alpha(g) \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1(g)u + \alpha(g)w \\ D_2(g)w \end{pmatrix}.$$

Insbesondere:

- $w = 0$ :

$$\begin{pmatrix} D_1(g)u \\ 0 \end{pmatrix} \in U.$$

- $u = 0$ :

$$V \ni \begin{pmatrix} \alpha(g)w \\ D_2(g)w \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha(g)w \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ D_2(g)w \end{pmatrix}}_{\in V \setminus U}.$$

$D(g)$  Darstellung.  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} D(g_1)D(g_2) &= \begin{pmatrix} D_1(g_1) & \alpha(g_1) \\ 0 & D_2(g_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1(g_2) & \alpha(g_2) \\ 0 & D_2(g_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_1(g_1)D_1(g_2) & D_1(g_1)\alpha(g_2) + \alpha(g_1)D_2(g_2) \\ 0 & D_2(g_1)D_2(g_2) \end{pmatrix} \\ &= D(g_1g_2) = \begin{pmatrix} D_1(g_1g_2) & \alpha(g_1g_2) \\ 0 & D_2(g_1g_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$D_1(g)$  and  $D_2(g)$  sind  $m$ - und  $(n-m)$ -dimensionale Darstellungen. Vorsicht:  $\alpha(g_1g_2) \neq \alpha(g_1)\alpha(g_2)$ .  $\alpha$  ist im Allg. keine quadratische Matrix.

„ $\Leftarrow$ “:

Umgekehrt, sei  $D(g)$  von der Form Gl. (2.1).  $\Rightarrow \{(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)^T\}$  bleibt invariant.

**Definition 2.2.4** Ein Vektorraum  $V$  heißt die **direkte Summe** von Untervektorräumen  $V_1, \dots, V_n$ ,

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n,$$

wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1.  $V = V_1 + \cdots + V_n := \{v_1 + \cdots + v_n \mid v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n\}$ .
2. Von Null verschiedene Vektoren  $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$  sind linear unabhängig.

Ist  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ , so ist jedes  $v \in V$  *eindeutig* darstellbar als  $v = v_1 + \cdots + v_n$  mit  $v_i \in V_i$ .

**Beispiel 2.2.5 Direkte Summe von Darstellungen.** Es sei  $V = V_1 \oplus V_2$  die direkte Summe zweier Untervektorräume  $V_1$  und  $V_2$ . Seien  $T_i : V_i \rightarrow V_i$  lineare Operatoren.  $T = T_1 \oplus T_2 : V \rightarrow V$  mit  $Tx = T_1x_1 + T_2x_2$ . Seien  $D_i$  Darstellungen von  $G$  auf  $V_i$ . Direkte Summe:  $D = D_1 \oplus D_2 = \{D(g) = D_1(g) \oplus D_2(g) \mid g \in G\}$ :

$$\begin{aligned} D(g_1)D(g_2)x &= D(g_1)(D_1(g_2)x_1 + D_2(g_2)x_2) \\ &= D_1(g_1)D_1(g_2)x_1 + D_2(g_1)D_2(g_2)x_2 \\ &= D_1(g_1g_2)x_1 + D_2(g_1g_2)x_2 = D(g_1g_2)x. \end{aligned}$$

Sei  $\dim(V_1) = m$  und  $\dim(V_2) = n$ :

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}$$

mit  $D_1(g)$   $(m, m)$ -Matrix und  $D_2(g)$   $(n, n)$ -Matrix.

**Definition 2.2.6** Sei  $D$  eine reduzible Darstellung auf einem Vektorraum  $V$  mit invariantem Unterraum  $V_1$ . Eine Darstellung heißt **vollständig reduzibel**, wenn ein weiterer invarianter Unterraum  $V_2$  existiert mit  $V = V_1 \oplus V_2$ .  $D = D_1 \oplus D_2$ , wobei  $D_i$  als Einschränkung von  $D$  auf  $V_i$  bezeichnet wird.

Für endlichdimensionale Vektorräume führt dies auf Blockdiagonalform.

**Definition 2.2.7** Eine Darstellung  $D$  auf einem Vektorraum  $V$  heißt **irreduzibel**, wenn  $V$  außer  $\{0\}$  und  $V$  keinen invarianten Unterraum besitzt.

**Satz 2.2.8** Sei  $D = \{U(g)\}$  eine unitäre Darstellung von  $G$  auf einem Hilbert-Raum  $(V, \|\cdot\|)$ :

$$\langle x \mid U(g)y \rangle = \langle U^\dagger(g)x \mid y \rangle = \langle U^{-1}(g)x \mid y \rangle \quad \forall g \in G, \quad \forall x, y \in V.$$

Dann gilt:

1.  $D$  ist die direkte Summe irreduzibler Darstellungen  $D = \oplus_i D_i$ .
2.  $V$  lässt sich als orthogonale Summe darstellen:  $V = \oplus_i V_i$  mit  $x_i \in V_i$ ,  $x_j \in V_j$ ,  $\langle x_i \mid x_j \rangle = 0$  für  $i \neq j$ .



---

Zerlegungssatz aus der Theorie der linearen Operatoren: Sei  $U$  ein vollständiger Unterraum des Prä-Hilbert-Raumes  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ . Dann lässt sich jedes  $x \in V$  eindeutig darstellen in der Form

$$x = y + z \quad \text{mit} \quad y \in U, z \in U^\perp.$$

Es gilt also  $V = U \oplus U^\perp$ .

Insbesondere sind die Voraussetzungen erfüllt, wenn  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ein Hilbert-Raum ist und  $U$  ein abgeschlossener Unterraum.

---

Begründung:

1. Fall:  $V$  besitzt keinen nichttrivialen, bzgl.  $D$  inv. UR.  $\Rightarrow D$  irreduzibel.
2. Fall:

1. Sei  $V_1$  ein bzgl.  $D$  invarianter, nichttrivialer Unterraum von  $V$ .

Zerlegungssatz  $\Rightarrow$  Jedes  $x \in V$  lässt sich eindeutig als  $x = x_1 + x_2$  mit  $x_1 \in V_1$  und  $x_2 \in V_2$  darstellen, wobei  $V_2$  das orthogonale Komplement von  $V_1$  in  $V$  ist.  $\Rightarrow V = V_1 \oplus V_2$ .

2. Sei  $D$  unitär auf  $V$  und  $V_1$  invariant bzgl.  $D$ . Dann ist auch  $V_2$  invariant bzgl.  $D$ .

Denn:  $V_1$  invariant bzgl. unitärem  $U$  (Argument  $g$  unterdrückt).  $\Rightarrow \exists$  Basis  $e_1, e_2, \dots$ , mit  $Ue_\alpha = \lambda_\alpha e_\alpha$  mit  $|\lambda_\alpha| = 1$ .

$$U^{-1}U = I \Rightarrow U^{-1}e_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha}e_\alpha \Rightarrow V_1 \text{ invariant bzgl. } U^{-1}.$$

Sei  $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$ , d. h.  $\langle x_1 | x_2 \rangle = 0$ . Z. z.:  $Ux_2 \in V_2$ .

$$\langle Ux_2 | x_1 \rangle = \langle x_2 | U^\dagger x_1 \rangle = \langle x_2 | U^{-1}x_1 \rangle = \langle x_2 | x'_1 \rangle = 0, \text{ da } x'_1 \in V_1.$$

$\Rightarrow V = V_1 \oplus V_2$  mit  $V_i$  invariant bzgl.  $U$ , d. h.  $D = D_1 \oplus D_2$ .

3. Besitzt  $V_1$  oder  $V_2$  invarianten Unterraum, wiederhole die Prozedur.

**Satz 2.2.9** Für eine endliche Gruppe  $G$  der Ordnung  $|G|$  ist jede Darstellung  $D$  auf einem Skalarproduktraum  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  äquivalent zu einer unitären Darstellung.

Beweis:

1. Schritt: Wir definieren ein weiteres Skalarprodukt  $\{\cdot | \cdot\}$  mittels (siehe Übung 8, Aufgabe 1.)

$$\{x | y\} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle D(g)x | D(g)y \rangle.$$

Für jedes  $g \in G$  gilt

$$\begin{aligned} \{D(g)x|D(g)y\} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \underbrace{\langle D(g')D(g)x|D(g')D(g)y \rangle}_{D(g'g)} \\ &= \{x|y\}, \quad (*) \end{aligned}$$

da mit  $g'$  bei festem  $g$  auch das Produkt  $g'g$  über ganz  $G$  läuft. Damit ist  $D(g)$  unitär bzgl. des Skalarprodukts  $\{\cdot|\cdot\}$ .

2. Schritt: Seien  $u_1, u_2, \dots$  und  $v_1, v_2, \dots$  orthonormiert bzgl.  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  und  $\{\cdot | \cdot\}$ . Sei  $v_i = Su_i$  mit regulärem  $S$ . Dann folgt aus  $Sx = S(x_i u_i) = x_i v_i$ , dass

$$\{Sx, Sy\} = x_i^* y_j \underbrace{\{v_i | v_j\}}_{\delta_{ij}} = \langle x | y \rangle. \quad (**)$$

Definiere  $D'(g) = S^{-1}D(g)S \forall g \in G$ .

$$\begin{aligned} \langle D'(g)x | D'(g)y \rangle &= \langle S^{-1}D(g)Sx | S^{-1}D(g)Sy \rangle \\ &\stackrel{(**)}{=} \{D(g)Sx | D(g)Sy\} \\ &\stackrel{(*)}{=} \{Sx | Sy\} \\ &\stackrel{(**)}{=} \langle x | y \rangle. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Die zu  $D$  äquivalente Darstellung  $D'$  ist unitär bzgl.  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .

Kombiniere Sätze 2.2.9 und 2.2.8.

**Folgerung 2.2.10** Für endliche Gruppen sind reduzible Darstellungen immer vollständig reduzibel.

### Beispiele 2.2.11 für Darstellungen.

1. • Sei  $D = \{D(g)\}$  Darstellung einer Gruppe  $G$  in Form von Matrizen mit  $g \mapsto D(g)$ . Dann definieren auch
  - (a)  $g \mapsto D^*(g)$  (komplex konjugierte Darstellung  $D^*$ )
  - (b)  $g \mapsto D^T(g^{-1}) = D^{T^{-1}}(g)$  (Hamermesh: adjungierte Darstellung  $\bar{D}$ ; Balachandran und Trahern: zu  $D$  kontragradiente Darstellung)
  - (c)  $g \mapsto D^\dagger(g^{-1})$  (zu  $D^*$  kontragradiente Darstellung)

Darstellungen von  $G$  (siehe Übung 8, Aufgabe 2.).

- Sei  $D$  eine unitäre Darstellung,  $D^\dagger(g) = D^{-1}(g)$ . Dann gilt:

$$D^\dagger(g^{-1}) = D^{-1}(g^{-1}) = D(g),$$

d. h. (c) =  $D$  und

$$D^T(g^{-1}) = D^{\dagger T}(g) = D^*(g)$$

d. h. (b) = (a).

Wichtig:  $D$  und  $D^*$  müssen nicht äquivalent sein.

2. Für  $SU(2)$  und  $SO(3)$  gilt:  $D$  und  $D^*$  sind äquivalente Darstellungen, d. h. es existiert ein  $S$  mit  $SD(g)S^{-1} = D^*(g) \forall g \in G$ . Begründung analog zu Übung 8, Aufgabe 3.:

$$S = \exp[-i\pi M(J_y)],$$

mit  $M(J_y)$  als Matrixdarstellung von  $J_y$ .

3.  $SU(3) := \{g | g \text{ komplexe } (3,3)\text{-Matrix mit } g^\dagger = g^{-1} \wedge \det(g) = 1\}$ .  
Fundamentaldarstellung  $\mathbf{3}$  von  $SU(3)$ ,  $V = \mathbb{C}^3$ :

$$SU(3) \ni g \mapsto D(g) := g \in \mathbf{3}.$$

Komplex konjugierte Darstellung  $\mathbf{3}^*$  oder  $\bar{\mathbf{3}}$ :

$$SU(3) \ni g \mapsto D^*(g) := g^* \in \mathbf{3}^*.$$

Zur Erinnerung:  $\lambda$  EW von  $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$ . Sei  $B = SAS^{-1}$  mit regulärem  $S$ . Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom und deshalb dieselben Eigenwerte.

Begründung: Es gilt  $I = SIS^{-1}$ . Wende den Determinantenmultiplikationssatz an:

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det(B - \lambda SIS^{-1}) \\ &= \det(S(A - \lambda I)S^{-1}) \\ &= \det(S)\det(A - \lambda I)\det(S^{-1}) \\ &= \det(A - \lambda I). \end{aligned}$$

Sei

$$SU(3) \ni g = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det(g) = \left(\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)\right)^3 = \exp(2\pi i) = 1.$$

$$D^*(g) = g^* = \exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right) \mathbb{1}_{3 \times 3}.$$

Eigenwerte von  $D(g)$  und  $D^*(g)$  unterscheiden sich.

$\Rightarrow$  Für  $SU(3)$  sind  $\mathbf{3}$  und  $\mathbf{3}^*$  nicht äquivalent.

4. Verallgemeinerung für  $SU(N)$ ,  $N \geq 3$ : Für  $SU(N)$  sind  $\mathbf{N}$  und  $\mathbf{N}^*$  nicht äquivalent.

Die folgende Begriffsbildung spielt eine wichtige Rolle in

1. der Beschreibung von Zuständen zusammengesetzter Systeme,
2. der Kombination von Raum-Zeit-Symmetrien mit inneren Symmetrien wie der SU(3)-Farbsymmetrie der starken Wechselwirkung, starkem und schwachem Isospin etc.

**Definition 2.2.12** Es seien  $V_1$  und  $V_2$  zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Das so genannte **Tensorprodukt**  $V_1 \otimes V_2$  sei gleich der Menge aller formalen, *endlichen* Linearkombinationen

$$\alpha_1 x_1 \otimes y_1 + \dots + \alpha_n x_n \otimes y_n$$

mit  $x_i \in V_1$ ,  $y_i \in V_2$  und  $\alpha_i \in \mathbb{K}$ . Mit dem Symbol  $x \otimes y$  wird wie mit einem Produktzeichen gerechnet, d. h. es gelten die beiden Distributivgesetze

$$\begin{aligned} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \otimes y &= \alpha_1 x_1 \otimes y + \alpha_2 x_2 \otimes y, \\ x \otimes (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) &= \alpha_1 x \otimes y_1 + \alpha_2 x \otimes y_2, \end{aligned}$$

für alle  $\alpha_i \in \mathbb{K}$ ,  $x, x_1, x_2 \in V_1$  und  $y, y_1, y_2 \in V_2$ .  $V_1 \otimes V_2$  ist wieder ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

**Anwendung 2.2.13 Direktes Produkt von Darstellungen:** Gegeben seien zwei endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume  $V_1$  und  $V_2$  mit Basen  $e_1, \dots, e_m$  und  $f_1, \dots, f_n$ .  $V = V_1 \otimes V_2$  hat eine  $m \cdot n$ -dimensionale Basis, so dass

$$V_1 \otimes V_2 \ni x = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} e_i \otimes f_j.$$

Seien  $L_i$  lin. Operatoren auf  $V_i$ . Definiere  $L = L_1 \otimes L_2$ :

$$Lx = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} L_1 e_i \otimes L_2 f_j.$$

Das Produkt zweier Operatoren lautet

$$LM = L_1 M_1 \otimes L_2 M_2.$$

Seien  $D^{(i)}$  Matrixdarstellungen von  $G_i$  auf  $V_i$ :

$$D^{(1)}(g)e_i = D_{i'i'}^{(1)}(g)e_{i'} \quad \forall g \in G_1, \quad D^{(2)}(g')f_j = D_{j'j}^{(2)}(g')f_{j'} \quad \forall g' \in G_2.$$

Dann definiert

$$D(g, g') = D^{(1)}(g) \otimes D^{(2)}(g')$$

mit

$$D_{ij;i'j'}(g, g') = D_{ii'}^{(1)}(g) D_{jj'}^{(2)}(g')$$

eine Darstellung von  $G_1 \times G_2$  auf  $V_1 \otimes V_2$ .

Behauptung:  $D^{(i)}$  irred. Darstellungen von  $G_i \Leftrightarrow D$  irred. Darstellung von  $G_1 \times G_2$ .

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “: Beweis (für endliche Gruppen  $G_i$ ) durch Widerspruch. Wegen Satz 2.2.9 können wir annehmen, dass  $D^{(i)}$  unitär ist. Jedes  $x \in V_1 \otimes V_2$  lässt sich schreiben als

$$x = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} e_i \otimes f_j.$$

Annahme:  $D$  reduzibel.  $\Rightarrow \exists$  eigentlicher invarianter Unterraum  $H$  von  $V_1 \otimes V_2$  mit

$$D(g_1, g_2)x \in H \forall x \in H, g_i \in G_i.$$

$\Rightarrow$  In einer geeigneten Basis ist mindestens ein  $a_{ij} = 0$ . O. B. d. A. sei  $a_{11} = 0$ , d. h.

$$H \ni x = \left. \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\} m \cdot n \text{ Komponenten.}$$

Da  $H$  invariant bzgl.  $D$ , gilt

$$\begin{aligned} H \ni Dx &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} D e_i \otimes f_j \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{i'=1}^m \sum_{j'=1}^n D_{i'i}^{(1)}(g_1) D_{j'j}^{(2)}(g_2) e_{i'} \otimes f_{j'} \\ &=: \sum_{i'=1}^m \sum_{j'=1}^n b_{i'j'}(g_1, g_2) e_{i'} \otimes f_{j'} \end{aligned}$$

mit  $b_{11} = 0 \forall g_i \in G_i$ . Setze  $g_1 = e_1 \Rightarrow D_{i'i}^{(1)}(e_1) = \delta_{i'i} \Rightarrow$

$$H \ni \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{j'=1}^n D_{j'j}^{(2)}(g_2) e_i \otimes f_{j'} = \sum_{i=1}^m \sum_{j'=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} D_{j'j}^{(2)}(g_2)}_{b_{ij'}(e_1, g_2)} e_i \otimes f_{j'}.$$

$\Rightarrow b_{11}(e_1, g_2) = 0 \forall g_2 \in G_2. \Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} D_{1j}^{(2)}(g_2) = 0 \forall g_2 \in G_2,$$

wobei  $a_{11} = 0$  und  $a_{1j}, j \geq 2$  beliebig. Wähle  $x$  mit Komponenten  $a_{1j} = \delta_{jk}, j = 2, \dots, n$  und betrachte sukzessive  $k = 2, \dots, n. \Rightarrow D^{(2)}(g_2)$  ist von der Form

$$D^{(2)}(g_2) = \left( \begin{array}{c|c} a & \begin{array}{c} n-1 \text{ Nullen} \\ \hline \overbrace{0 \dots 0} \end{array} \\ \hline |\vec{b}\rangle & A \end{array} \right) \quad \forall g_2 \in G_2.$$

Da  $D^{(2)}$  unitär ist, gilt

$$D^{(2)\dagger}(g_2) = \left( \begin{array}{c|c} a^* & \langle \vec{b} | \\ \hline 0 & A^\dagger \end{array} \right) \quad \forall g_2 \in G_2.$$

Aus der Unitarität folgt

$$D^{(2)}(g_2) D^{(2)\dagger}(g_2) = \left( \begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline |\vec{b}\rangle & A \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} a^* & \langle \vec{b} | \\ \hline 0 & A^\dagger \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} |a|^2 & a \langle \vec{b} | \\ \hline |\vec{b}\rangle a^* & AA^\dagger \end{array} \right) = \mathbb{1}_{n \times n}.$$

Da  $a \neq 0$ , folgt  $|\vec{b}\rangle = 0$  und damit  $D^{(2)}$  reduzibel im Widerspruch zur Voraussetzung.  $\Rightarrow$  Wir müssen die Annahme „ $D$  reduzibel“ fallen lassen.

„ $\Leftarrow$ “:

Annahme:  $D^{(1)}$  reduzibel  $\Rightarrow \exists$  Unterraum  $U_1 \subset V_1$  mit  $U_1 \neq \{0\}$  und  $U_1 \neq V_1$  dergestalt, dass  $D^{(1)}(g_1)u_1 \in U_1$  für alle  $g_1 \in G_1$  und  $u_1 \in U_1$ . Es sei  $\{e_1, \dots, e_k\}$  eine Basis von  $U_1$ , wobei  $1 \leq k < m$ .

$D^{(1)}$  reduzibel.  $\Rightarrow$

$$D^{(1)}(g_1)e_i = \sum_{i'=1}^k D_{i'i}^{(1)}(g_1) e_{i'} \quad \forall g_1 \in G_1, i = 1, \dots, k.$$

Nun betrachten wir ein Element  $v$  aus  $U_1 \otimes V_2$ ,

$$U_1 \otimes V_2 \ni v = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n a_{ij} e_i \otimes f_j,$$

und die Wirkung von  $D(g_1, g_2)$  auf dieses Element:

$$\begin{aligned}
D(g_1, g_2)v &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n a_{ij} D^{(1)}(g_1)e_i \otimes D^{(2)}(g_2)f_j \\
&= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{i'=1}^k \sum_{j'=1}^n D_{i'i}^{(1)}(g_1) D_{j'j}^{(2)}(g_2) e_{i'} \otimes f_{j'} \\
&= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \underbrace{\left( \sum_{i'=1}^k \sum_{j'=1}^n D_{i'i}^{(1)}(g_1) D_{j'j}^{(2)}(g_2) a_{ij} \right)}_{a'_{ij}} e_i \otimes f_j \\
&\in U_1 \otimes V_2,
\end{aligned}$$

d. h.  $D$  ist reduzible Darstellung im Widerspruch zur Voraussetzung.  $\Rightarrow$  Wir müssen die Annahme „ $D^{(1)}$  reduzibel“ fallen lassen. Argumentation für  $D^{(2)}$  analog.

**Definition 2.2.14** Sei  $G_1 = G_2 = G$ .  $D^{(1)}$  und  $D^{(2)}$  seien Darstellungen von  $G$  auf  $V_1$  und  $V_2$ . Dann bezeichnet man  $D = D^{(1)} \otimes D^{(2)}$  mit

$$D(g_1, g_2) := D^{(1)}(g_1) \otimes D^{(2)}(g_2), \quad g_i \in G,$$

als **äußere Tensorproduktdarstellung** von  $G \times G$  der Darstellungen  $D^{(1)}$  und  $D^{(2)}$  auf  $V_1 \otimes V_2$  (beachte, dass die  $g_i$  verschieden sein können).

**Beispiel 2.2.15**  $G = \text{SU}(2)$ .  $D^{(1)} = \{D^{(1)}(g) = g | g \in \text{SU}(2)\}$  ist Darstellung von  $\text{SU}(2)$  auf  $\mathbb{C}^2$ . Definiere

$$D : (g_1, g_2) \mapsto D^{(1)}(g_1) \otimes D^{(1)}(g_2) = g_1 \otimes g_2.$$

$D$  ist keine treue Darstellung des externen direkten Produktes  $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$  auf  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , denn

$$\begin{aligned}
(\mathbb{1}, \mathbb{1}) &\mapsto \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}, \\
(-\mathbb{1}, -\mathbb{1}) &\mapsto (-\mathbb{1}) \otimes (-\mathbb{1}) = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}.
\end{aligned}$$

Sei  $G' = \{(g, g) | g \in G\}$ . Dann ist  $G' \cong G$ . Die Einschränkung der äußeren Tensorproduktdarstellung  $D$  von  $G \times G$  auf  $G'$  liefert

**Definition 2.2.16** die **innere Tensorproduktdarstellung** (Kronecker-Produkt) von  $G$  auf  $V_1 \otimes V_2$ ,

$$D'(g) := D^{(1)}(g) \otimes D^{(2)}(g), \quad g \in G.$$

**Beispiel 2.2.17 aus der Quantenmechanik.** Gegeben sei der Hamilton-Operator eines Zwei-Elektronen-Systems:

$$H = \underbrace{\frac{\vec{p}^2(1)}{2m} + V_1(r(1))}_{H_0(1)} + \underbrace{\frac{\vec{p}^2(2)}{2m} + V_1(r(2)) + V_2(r_{12})}_{H_0(2)} =: H_0 + V_2$$

mit  $(n = 1, 2)$

$$\begin{aligned} r(n) &= |\vec{r}(n)|, \\ r_{12} &= |\vec{r}(1) - \vec{r}(2)|, \\ V_1(r(n)) &= -\frac{Z\alpha}{r(n)}, \\ V_2(r_{12}) &= \frac{\alpha}{r_{12}}. \end{aligned}$$

Vertauschungsrelationen  $(m, n \in \{1, 2\}; i, j \in \{1, 2, 3\})$

$$\begin{aligned} [x_i(m), x_j(n)] &= 0, \\ [p_i(m), p_j(n)] &= 0, \\ [x_i(m), p_j(n)] &= i\delta_{ij}\delta_{mn}. \end{aligned}$$

- $H_0 = H_0(1) + H_0(2)$  besitzt eine  $G = O(3) \times O(3)$ -Symmetrie.
- $H_0(1)$  und  $H_0(2)$  vertauschen miteinander.

Produktansatz: Eigenzustände sind vom Typ (Hauptquantenzahlen unterdrückt)

$$|l_1, m_1\rangle \otimes |l_2, m_2\rangle,$$

wobei  $\{|l_i, m_i\rangle | m_i = -l_i, \dots, l_i\}$ ,  $l_i \in \mathbb{N}_0$ , Basen der Trägerräume der irreduziblen Darstellungen  $D^{(l_i)}$  von  $SO(3)$  sind. Ist  $|V_2| \ll |H_0|$ , benutzt man  $|l_1, m_1\rangle \otimes |l_2, m_2\rangle$  als Ausgangspunkt für Störungstheorie.

- $H$  besitzt nur eine  $G' = \{(g, g) | g \in O(3)\} \cong O(3)$ -Symmetrie, da (Übung 9, Aufgabe 1.)

$$[l_i(n), V_2(r_{12})] \neq 0$$

aber

$$[L_i, V_2(r_{12})] = 0$$

mit  $\vec{L} = \vec{l}(1) + \vec{l}(2) (= \vec{l} \otimes I + I \otimes \vec{l})$ .

Klassifikation der Eigenzustände bzgl.  $\{|L, M\rangle, M = -L, \dots, L\}$ . Basis des Trägerraums einer irreduziblen Darstellung  $D^{(L)}$  von  $SO(3)$ .  $V_2$  führt zu einer Aufhebung der Entartung der Eigenzustände von  $H_0$ , da  $H$  eine geringere Symmetrie als  $H_0$  besitzt.



- Anmerkung: Tatsächlich versucht man mit einem Ansatz aus  $V_2$  „zentrale Anteile“ zu separieren:

$$H = H'_0 + V'_2,$$

mit  $O(3) \times O(3)$ -symmetrischem  $H'_0$  und  $O(3)$ -symmetrischem  $V'_2$ .

**Anmerkung 2.2.18** Sei  $D = D^{(1)} \otimes D^{(2)}$  eine irreduzible äußere Tensorproduktdarstellung von  $G \times G$ . Im Allg. ist die innere Tensorproduktdarstellung  $D'$  keine irreduzible Darstellung von  $G'$ , d. h. es können Teilräume von  $V_1 \otimes V_2$  existieren, die invariant bzgl.  $D^{(1)}(g) \otimes D^{(2)}(g) \forall g \in G$  sind.

**Beispiel 2.2.19** Kopplung zweier Spins (Übung 8, Aufgabe 4.): Invariante Unterräume zu  $S = 1$  und  $S = 0$ .

Die Reduktion der inneren Tensorproduktdarstellung in irreduzible Komponenten heißt **Clebsch-Gordan-Zerlegung**:

$$D' = \oplus_{\mu} D^{(\mu)},$$

wobei  $D^{(\mu)}$  irreduzible Darstellungen von  $G$  sind.

## 2.3 Lemmata von Schur, Orthogonalitätsrelationen und Kriterien für Irreduzibilität

Fragestellung:

1. Wie erkennt man, ob eine Darstellung irreduzibel ist?
2. Wieviele nichtäquivalente, irreduzible Darstellungen einer (endlichen) Gruppe  $G$  gibt es?

---

Zur Erinnerung: Eigenschaften linearer Operatoren (als Vorbereitung für die Lemmata von Schur). Sei  $L : V \rightarrow W$  ein linearer Operator:

- $\text{Kern}(L) = \{x \in V \mid Lx = 0\}$ .
  - $\text{Bild}(L) = \{y \in W \mid \exists x \in V \text{ mit } y = Lx\} = W_L$ .
1.  $L$  injektiv  $\Leftrightarrow \text{Kern}(L) = \{0\}$ .
  2.  $L$  surjektiv  $\Leftrightarrow \text{Bild}(L) = W$ .
  3.  $L$  invertierbar  $\Leftrightarrow \text{Kern}(L) = \{0\} \wedge \text{Bild}(L) = W$ .
  4.  $L$  invertierbar  $\Rightarrow \dim(W) = \dim(V)$ .
-

**Lemma 2.3.1** (Schur) Seien  $D_1 : V_1 \rightarrow V_1$  und  $D_2 : V_2 \rightarrow V_2$  zwei irreduzible Darstellungen von  $G$  auf  $\mathbb{K}$ -VR  $V_i$ . Sei  $L : V_1 \rightarrow V_2$  ein linearer Operator mit

$$LD_1(g) = D_2(g)L \quad \forall g \in G. \quad (*)$$

Dann gilt: Entweder  $L = 0$  oder  $L$  invertierbar mit

$$D_2(g) = LD_1(g)L^{-1} \quad \forall g \in G, \text{ d. h. } D_1 \text{ und } D_2 \text{ sind äquivalent.}$$

Insbesondere: Für  $\dim(V_1) \neq \dim(V_2)$  muss  $L = 0$  gelten. Vorsicht: Es gilt nicht, dass aus  $\dim(V_1) = \dim(V_2)$  automatisch ein invertierbares  $L$  folgt.

Beweis:

1.  $L = 0$  : Triviale Lösung.

2. Sei  $L \neq 0$ .

(a) Sei  $x \in \text{Kern}(L)$ , d. h.  $Lx = 0$ , und  $g \in G$  beliebig:

$$0 = D_2(g)Lx \stackrel{(*)}{=} L(D_1(g)x) \Rightarrow D_1(g)x \in \text{Kern}(L).$$

$\Rightarrow \text{Kern}(L)$  ist invarianter Unterraum von  $D_1$ .

$D_1$  irreduzibel.  $\Rightarrow \text{Kern}(L) = \{0\}$  oder  $V_1$ .

$L \neq 0$ .  $\Rightarrow \text{Kern}(L) = \{0\}$ , denn wäre  $\text{Kern}(L) = V_1$ , würden alle Elemente auf 0 abgebildet und  $L$  wäre der Nulloperator.

$\Rightarrow L$  injektiv.

(b) Sei  $0 \neq y \in \text{Bild}(L)$ .  $\Rightarrow \exists 0 \neq x \in V_1$  mit  $y = Lx$  :

$$D_2(g)y = D_2(g)Lx \stackrel{(*)}{=} LD_1(g)x \in \text{Bild}(L).$$

$\Rightarrow \text{Bild}(L)$  ist invariant bzgl.  $D_2$ .

$D_2$  irreduzibel.  $\Rightarrow \text{Bild}(L) = \{0\}$  oder  $V_2$ .

$\text{Bild}(L) \neq \{0\}$ , da  $L$  injektiv.  $\Rightarrow \text{Bild}(L) = V_2$ .

$\Rightarrow L$  surjektiv.

(c) Kombiniere (a) und (b).  $\Rightarrow L$  invertierbar.

Wenn ein linearer Operator mit allen Operatoren einer irreduziblen Darstellung kommutiert, muss es sich dabei um ein Vielfaches der Identität handeln. Dies ist der Inhalt des folgenden Lemmas.

**Lemma 2.3.2** (Schur) Es sei  $D : V \rightarrow V$  eine irreduzible Darstellung von  $G$  auf einem endlichdimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  und  $L : V \rightarrow V$  ein linearer Operator mit

$$[L, D(g)] = 0 \quad \forall g \in G. \quad (*)$$

Dann gilt:  $L$  ist Vielfaches der Identität  $I$  auf  $V$ .

Beweis:

1.  $L = 0$  trivial.
2. Sei  $L \neq 0$ . Wir stellen  $L$  durch eine  $(n, n)$ -Matrix  $A$  dar. Die Suche nach deren Eigenvektoren führt über

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}_{n \times n}) = 0$$

auf das charakteristische Polynom der Matrix  $A$  vom Grad  $n$ :

$$P_A(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \dots + \alpha_0, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

Die Forderung  $P_A(\lambda) = 0$  ist eine algebraische Gleichung vom Grad  $n$ , die laut Fundamentalsatz der Algebra in  $\mathbb{C}$  genau  $n$  Wurzeln hat (Vielfachheit der Wurzel mitgezählt). Deshalb hat jeder lineare Operator auf einem endlichdimensionalen  $\mathbb{C}$ -VR mindestens einen Eigenvektor  $Lx = \lambda x$  mit  $x \neq 0$  und  $\lambda \neq 0$  (denn wären alle  $\lambda_i = 0$ , wäre  $A$  die Nullmatrix):

$$\lambda(D(g)x) = D(g)(\lambda x) = D(g)Lx \stackrel{(*)}{=} L(D(g)x).$$

$\Rightarrow D(g)x$  ist Eigenvektor von  $L$  mit Eigenwert  $\lambda$ .

$\Rightarrow \{x | Lx = \lambda x\}$  invariant bzgl.  $D$ .

$D$  irreduzibel.  $\Rightarrow \{0\} \vee V$ .  $\{0\}$  ausgeschlossen, da  $0$  kein Eigenvektor.

$\Rightarrow V: Lx = \lambda x \forall x \in V \Rightarrow L = \lambda I$ .

**Satz 2.3.3 Fundamentale Orthogonalitätsrelation für Matrizen irreduzibler Darstellungen.** Es seien  $D^{(\mu)}$  und  $D^{(\nu)}$  nichtäquivalente, irreduzible, unitäre Darstellungen einer endlichen Gruppe der Ordnung  $|G|$  auf endlichdimensionalen Vektorräumen  $V_\mu$  und  $V_\nu$  mit Dimensionen  $n_\mu$  und  $n_\nu$  [siehe Satz 2.2.9, außerdem:  $D^\dagger(g) = D^{-1}(g) = D(g^{-1})$ ]. Dann gilt folgende Orthogonalitätsrelation:

$$\sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) \underbrace{D_{js}^{(\nu)*}(g)}_{D_{sj}^{(\nu)}(g^{-1})} = \frac{|G|}{n_\mu} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{rs}. \quad (2.2)$$

---

\* Beweis:

1. Schritt: Sei  $A : V_\mu \rightarrow V_\nu$  eine (zunächst) beliebige lineare Abbildung und  $B : V_\mu \rightarrow V_\nu$  eine weitere lineare Abbildung definiert durch

$$B := \sum_g D^{(\nu)}(g) A D^{(\mu)}(g^{-1}).$$

Sei  $h \in G$  beliebig aber fest:

$$\underline{D^{(\nu)}(h)B} = \sum_g D^{(\nu)}(h)D^{(\nu)}(g)AD^{(\mu)}(g^{-1}) = \sum_g D^{(\nu)}(hg)AD^{(\mu)}(g^{-1}).$$

Setze  $hg = g' \Rightarrow g = h^{-1}g' \Rightarrow g^{-1} = g'^{-1}h$  und beachte für eine endliche Summe  $\sum_g \cdots = \sum_{g'} \cdots$ :

$$= \sum_{g'} D^{(\nu)}(g')AD^{(\mu)}(g'^{-1}h) = \underbrace{\sum_{g'} D^{(\nu)}(g')AD^{(\mu)}(g'^{-1})}_{B} D^{(\mu)}(h) = \underline{BD^{(\mu)}(h)},$$

d. h.

$$D^{(\nu)}(h)B = BD^{(\mu)}(h) \quad \forall h \in G.$$

Wende die Lemmata von Schur an:

1.  $V_\mu \neq V_\nu \Rightarrow B = 0$ ,
2.  $V_\mu = V_\nu \Rightarrow B = \lambda I$ ,

oder zusammengefasst:

$$\sum_g D^{(\mu)}(g)AD^{(\nu)}(g^{-1}) = \lambda_A^{(\mu)} \delta^{\mu\nu} I.$$

2. Schritt: Wähle  $A$  so, dass alle Einträge gleich Null sind, außer  $A_{rs} = 1$ , d. h.  $A_{lm} = \delta_{lr}\delta_{ms}$  und bezeichne  $\lambda_A^{(\mu)} = \lambda_{rs}^{(\mu)}$ . Betrachte den  $ij$ -Eintrag:

$$\sum_g D_{il}^{(\mu)}(g) \underbrace{A_{lm}}_{\delta_{lr}\delta_{ms}} D_{mj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g)D_{sj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \lambda_{rs}^{(\mu)} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij}.$$

3. Schritt: Bestimmung von  $\lambda_{rs}^{(\mu)}$ . Setze  $\mu = \nu$ , multipliziere mit  $\delta_{ij}$  und summiere über doppelt auftretende Indizes:

$$\underbrace{\sum_g \underbrace{(D^{(\mu)}(g^{-1})D^{(\mu)}(g))_{sr}}_{I_{sr} = \delta_{rs}}}_{|G|\delta_{rs}} = n_\mu \lambda_{rs}^{(\mu)},$$

wobei  $\delta_{ij}\delta_{ij} = n_\mu \Rightarrow \lambda_{rs}^{(\mu)} = |G|\delta_{rs}/n_\mu$  und damit die Behauptung.

**Definition 2.3.4** Für eine endlichdimensionale Darstellung  $D : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$  der Gruppe  $G$  bezeichnet man die durch

$$\chi(g) := \text{Tr}(D(g)), \quad g \in G,$$

definierte Spurfunktion  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$  als **Charakter** von  $D$ .

**2.3.5** Äquivalente Darstellungen besitzen dieselben Charaktere.  
Begründung: Siehe Übung 9, Aufgabe 2.

**Satz 2.3.6** Voraussetzungen wie in 2.3.3. Für Charaktere gilt

$$\sum_g \chi^{(\mu)}(g) \chi^{(\nu)*}(g) = |G| \delta^{\mu\nu}.$$

Beweis: Starte mit Gl. (2.2),

$$\sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{sj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \frac{|G|}{n_\mu} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{rs},$$

multipliziere mit  $\delta_{ir} \delta_{sj}$ , summiere über doppelt auftretende Indizes und benutze auf der rechten Seite  $\delta_{ij} \delta_{ir} \delta_{sj} \delta_{rs} = \delta_{ii} = n_\mu$ :

$$\sum_g D_{ii}^{(\mu)}(g) D_{jj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \sum_g \chi^{(\mu)}(g) \underbrace{\chi^{(\nu)}(g^{-1})}_{\chi^{(\nu)}(g)^*} = |G| \delta^{\mu\nu}.$$

**Notation 2.3.7**  $\varphi$  und  $\chi$  Charaktere:

$$\langle \varphi, \chi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_g \varphi(g) \chi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_g \varphi(g^{-1}) \chi(g) = \langle \chi, \varphi \rangle.$$

**Folgerung 2.3.8** Charaktere nichtäquivalenter, irreduzibler Darstellungen sind orthonormal:

$$\langle \chi^{(\mu)}, \chi^{(\nu)} \rangle = \delta^{\mu\nu}.$$

**Satz 2.3.9** Voraussetzungen wie in 2.3.3. Seien  $K_1, \dots, K_k$  die Konjugationsklassen von  $G$  mit jeweils  $k_i$  Elementen. Dann gilt

$$\delta^{\mu\nu} = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^k k_i \chi_i^{(\mu)} \chi_i^{(\nu)*}.$$

Beweis:

- Konjugation zerlegt  $G$  in disjunkte Äquivalenzklassen  $K_i$  (siehe 1.3.12).
- Seien  $a, b \in K_i$  mit  $a = gbg^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \chi^{(\mu)}(a) &= \chi^{(\mu)}(gbg^{-1}) = \text{Tr}(D^{(\mu)}(gbg^{-1})) \\ &= \text{Tr}(D^{(\mu)}(g)D^{(\mu)}(b)D^{(\mu)}(g^{-1})) \\ &= \text{Tr}(D^{(\mu)}(g^{-1})D^{(\mu)}(g)D^{(\mu)}(b)) \\ &= \text{Tr}(D^{(\mu)}(e)D^{(\mu)}(b)) = \text{Tr}(ID^{(\mu)}(b)) \\ &= \text{Tr}(D^{(\mu)}(b)) = \chi^{(\mu)}(b) \\ &=: \chi_i^{(\mu)}. \end{aligned}$$

**Folgerung 2.3.10** Für die Anzahl  $r$  der nichtäquivalenten irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe gilt  $r \leq k$ , wobei  $k$  die Anzahl der Konjugationsklassen ist.

Begründung: Für ein gegebenes  $\mu$  bilden die Zahlen  $\chi_i^{(\mu)} \sqrt{k_i}$  Komponenten eines Vektors (ungleich Null, da  $\chi^{(\mu)}(e) = n_\mu$ ) in einem  $k$ -dimensionalen Raum. Diese Vektoren sind laut Satz 2.3.9 orthogonal.  $\Rightarrow$  Anzahl  $r$  orthogonaler Vektoren  $\leq$  Dimension  $k$ .

**Satz 2.3.11** Es gilt sogar das Gleichheitszeichen:  $r = k$ .

Ohne Beweis: Siehe M. Hamermesh, Group theory, Kapitel 3-17.

**Beispiel 2.3.12** Gruppe  $D_3$ .  $|G| = 6$ . Konjugationsklassen (siehe 1.3.14):  $(e)$ ,  $(c) = \{c, c^2\}$ ,  $(b) = \{b, bc, bc^2\}$ . D. h.  $r = 3$ .

**Satz 2.3.13** Sei  $D$  eine reduzible Darstellung einer endlichen Gruppe  $G$  der Ordnung  $|G|$ . Dann gilt für die Zerlegung in irreduzible Darstellungen:

$$D = \bigoplus_{\nu=1}^k a_\nu D^{(\nu)} \quad \text{mit} \quad a_\nu = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi(g) \chi^{(\nu)}(g^{-1}). \quad (2.3)$$

$a_\nu \in \mathbb{N}_0$  bezeichnet, wie häufig  $D^{(\nu)}$  in der Zerlegung vorkommt.

Beweis: Wende 2.2.10 an: Jede reduzible Darstellung einer endlichen Gruppe ist vollständig reduzibel. Bestimmung der nichtnegativen Koeffizienten  $a_\nu$ : Bilde für festes  $g$  die Spur in Gl. (2.3):

$$\chi(g) = \sum_{\nu} a_\nu \chi^{(\nu)}(g).$$

Multipliziere mit  $\chi^{(\mu)}(g^{-1})$  und summiere über  $g$ :

$$\sum_g \chi^{(\mu)}(g^{-1}) \chi(g) = \sum_{\nu} a_\nu \underbrace{\sum_g \chi^{(\mu)}(g^{-1}) \chi^{(\nu)}(g)}_{|G| \delta^{\mu\nu} \text{ wegen Satz 2.3.6}} = |G| a_\mu. \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

Graphische Illustration:

$$\underbrace{\left( \begin{array}{c} \phantom{D(g)} \\ \phantom{D(g)} \\ \phantom{D(g)} \end{array} \right)}_{D(g)} = S \left( \begin{array}{ccccccc} D^{(1)}(g) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & D^{(1)}(g) & & & & \circ \\ & & & \ddots & & & \\ \circ & & & & D^{(k)}(g) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & D^{(k)}(g) \end{array} \right) S^{-1}$$

$D(g)$ :  $(m, m)$ -Matrix,  $S$  invertierbare  $(m, m)$ -Matrix,  $\sum_{\nu=1}^k a_\nu n_\nu = m$ .

**Satz 2.3.14** Es sei  $G$  eine endliche Gruppe der Ordnung  $|G|$ . Die durch

$$gg_i = \sum_{j=1}^{|G|} D_{ji}(g)g_j, \quad i = 1, \dots, |G|,$$

definierten  $(|G|, |G|)$ -Matrizen  $D(g)$  bilden die so genannte **reguläre Darstellung** von  $G$ .

Beweis:

- Wir zeigen zunächst, dass  $D(g)$  eine invertierbare, reelle  $(|G|, |G|)$ -Matrix ist.

– Das Produkt  $gg_i$  bestimmt die Einträge in der  $i$ -ten Spalte. Da

$$gg_i = g_l$$

mit einem eindeutigen  $g_l$ , hat die  $i$ -te Spalte in der  $l$ -ten Zeile eine 1 und sonst nur Nullen.

- Für festes  $g$  kann  $g_l$  nur für genau ein  $g_i$  als Kompositum auftreten. Deshalb folgt auch, dass jede Spalte genau eine 1 und sonst nur Nullen hat.
- Insbesondere folgt dann mit dem Entwicklungssatz von Laplace, dass  $\det(D(g)) = \pm 1$ .

- Es gilt immer

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \circ & \\ & & \ddots & & \\ & \circ & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

- Wir überprüfen die Homomorphismuseigenschaft. Wir betrachten zunächst

$$(gg')g_i = \sum_{j=1}^{|G|} D_{ji}(gg')g_j, \quad i = 1, \dots, |G|,$$

und vergleichen mit

$$\begin{aligned} g(g'g_i) &= g \sum_{k=1}^{|G|} D_{ki}(g')g_k \\ &= \sum_{k=1}^{|G|} D_{ki}(g') \sum_{j=1}^{|G|} D_{jk}(g)g_j \\ &= \sum_{j=1}^{|G|} \sum_{k=1}^{|G|} D_{jk}(g)D_{ki}(g')g_j \\ &= \sum_{j=1}^{|G|} (D(g)D(g'))_{ji}g_j, \end{aligned}$$

d. h.  $D(gg') = D(g)D(g')$ .

**Beispiel 2.3.15**  $C_3 = \{e, c, c^2\}$ .

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c \underbrace{e}_{g_1} = \underbrace{c}_{g_2} \Rightarrow D_{21}(c) = 1,$$

$$c \underbrace{c}_{g_2} = \underbrace{c^2}_{g_3} \Rightarrow D_{32}(c) = 1,$$

$$c \underbrace{c^2}_{g_3} = \underbrace{e}_{g_1} \Rightarrow D_{13}(c) = 1,$$

d. h.

$$D(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und analog

$$D(c^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weitere Beispiele, siehe Übung 9, Aufgabe 5.

**Satz 2.3.16** Voraussetzungen wie in 2.3.3. Es gilt

$$\sum_{\nu} n_{\nu}^2 = |G|. \quad (2.4)$$

Beweis: Wir betrachten die reguläre Darstellung und zerlegen sie laut Satz 2.3.13 in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen:

$$D = \bigoplus_{\nu} a_{\nu} D^{(\nu)} \quad \text{mit} \quad a_{\nu} = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi(g) \chi^{(\nu)}(g^{-1}).$$

Die Dimensionalität der regulären Darstellung ist  $|G|$ . Für die Charaktere gilt

$$\chi(g) = \begin{cases} |G| & \text{für } g = e, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Beachte: Ist  $D_{ii}(g) = 1$  für ein festes  $i$ , dann gilt  $g = e$  und damit  $D_{ii}(g) = D_{ii}(e) = 1$  für alle  $i$ , denn

$$gg_i = \sum_{j=1}^{|G|} D_{ji}(g)g_j = D_{ii}(g)g_i = g_i \Rightarrow g = e.)$$



Bestimmung von  $a_\nu$ :

$$a_\nu = \frac{1}{|G|} \sum_g \underbrace{|G| \delta_{ge}}_{\chi(g)} \chi^{(\nu)}(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} |G| \underbrace{\chi^{(\nu)}(e)}_{n_\nu} = n_\nu.$$

Betrachte nun speziell

$$\chi(e) = |G| = \sum_\nu \underbrace{n_\nu}_{a_\nu} \underbrace{n_\nu}_{\chi^{(\nu)}(e)} = \sum_\nu n_\nu^2.$$

**Satz 2.3.17 Frobenius-Kriterium für Irreduzibilität.** Eine endlichdimensionale Darstellung einer endlichen Gruppe  $G$  der Ordnung  $|G|$  mit Charakter  $\chi$  ist irreduzibel genau dann, wenn

$$\sum_g \chi^*(g) \chi(g) = |G|.$$

Beweis: „ $\Rightarrow$ “: Wende 2.3.6

$$\sum_g \chi^{(\mu)}(g) \chi^{(\nu)*}(g) = |G| \delta^{\mu\nu}$$

für  $\mu = \nu$  an.

„ $\Leftarrow$ “:

$$D = \bigoplus_\mu a_\mu D^{(\mu)} \Rightarrow \chi(g) = \sum_\mu a_\mu \chi^{(\mu)}(g).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |G| &= \sum_g \chi^*(g) \chi(g) = \sum_g \sum_{\mu, \nu} a_\mu a_\nu \chi^{(\mu)*}(g) \chi^{(\nu)}(g) \\ &= \sum_{\mu, \nu} a_\mu a_\nu \underbrace{\sum_g \chi^{(\mu)*}(g) \chi^{(\nu)}(g)}_{\delta^{\mu\nu} |G|, \text{ wegen 2.3.6}} = |G| \sum_\mu a_\mu^2. \end{aligned}$$

Da  $a_\mu \in \mathbb{N}_0$ , gilt  $a_\mu = 1$  für genau ein  $\mu$  und 0 sonst.  $\Rightarrow D$  irreduzibel.

**Satz 2.3.18** Voraussetzungen wie in 2.3.3. Für Charaktere gilt auch die Orthogonalitätsrelation

$$\frac{k_i}{|G|} \sum_{\mu=1}^r \chi_i^{(\mu)} \chi_j^{(\mu)*} = \delta_{ij},$$

wobei  $r$  die Anzahl der nichtäquivalenten, irreduziblen, unitären Darstellungen bezeichnet und  $k_i$  die Anzahl der Elemente in der Konjugationsklasse  $K_i$ .

Ohne Beweis: Siehe M. Hamermesh, Group theory, Kapitel 3-17.

## 2.4 Konstruktion einer Charaktertabelle

Sei  $G$  eine endliche Gruppe der Ordnung  $|G|$ . Leitfäden zur Konstruktion der Charaktere irreduzibler Darstellungen:

1. # irred. Darst.  $r = \#$  Konjugationsklassen  $k$  (Satz 2.3.11).
2.  $\sum_{\mu} n_{\mu}^2 = |G|$  (Satz 2.3.16).
3.  $\frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^k k_i \chi_i^{(\mu)} \chi_i^{(\nu)*} = \delta^{\mu\nu}$  (Satz 2.3.9).
4.  $\frac{k_i}{|G|} \sum_{\mu=1}^r \chi_i^{(\mu)} \chi_j^{(\mu)*} = \delta_{ij}$  (Satz 2.3.18).
5. Verwende außerdem jede weitere „nützliche“ Information.

**Beispiel 2.4.1**  $D_3$  (siehe 2. von 1.3.14).  $|G| = 6$ .  $k = 3$ :  $K_1 = \{e\}$ ,  $K_2 = \{c, c^2\}$ ,  $K_3 = \{b, bc, bc^2\}$ .

1.  $r = 3$ .
2.  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 6$ .

Es existiert immer die triviale Darstellung:  $D^{(1)}(g) = 1$  mit  $n_1 = 1$ .

$$\Rightarrow n_2^2 + n_3^2 = 5 = 1^2 + 2^2.$$

Benutze  $\chi^{(\mu)}(e) = n_{\mu}$ .

	$K_1 = \{e\}$	$K_2 = \{c, c^2\}$	$K_3 = \{b, bc, bc^2\}$
$k_i$	1	2	3
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1		
$\chi^{(3)}$	2		

Spezialfall: Für eine eindimensionale Darstellung gilt  $\chi(g) = D(g)$  und deshalb auch

- (a)  $\chi(g_1 g_2) = \chi(g_1) \chi(g_2)$ ,
- (b)  $\chi(g) \neq 0$ .

Damit gilt

$$\chi_3^{(2)} = \chi^{(2)}(b) = \chi^{(2)}(bc) = \chi^{(2)}(b) \chi^{(2)}(c) \Rightarrow \chi^{(2)}(c) = \chi_2^{(2)} = 1.$$

$$(\chi^{(2)}(b))^2 = \chi^{(2)}(b^2) = \chi^{(2)}(e) = 1 \Rightarrow \chi_3^{(2)} = \pm 1.$$

(Die zweite Relation kann man auch weglassen und gleich die Orthogonalität benutzen.)

3. Orthogonalität von  $\chi^{(2)}$  zu  $\chi^{(1)}$ :  $0 = \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot (\pm 1))$   
 $\Rightarrow \chi_3^{(2)} = -1$ .

	$K_1$	$K_2$	$K_3$
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	-1
$\chi^{(3)}$	2	$\alpha$	$\beta$

Benutze zur Bestimmung von  $\alpha$  und  $\beta$  die Orthogonalität in den Zeilen:

$$\begin{aligned} \mu = 1, \nu = 3 & : 0 = \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot \alpha^* + 3 \cdot 1 \cdot \beta^*) \\ & \Leftrightarrow 2 + 2\alpha^* + 3\beta^* = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu = 2, \nu = 3 & : 0 = \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot \alpha^* + 3 \cdot (-1) \cdot \beta^*) \\ & \Leftrightarrow 2 + 2\alpha^* - 3\beta^* = 0. \end{aligned}$$

Addition liefert  $4 + 4\alpha^* = 0 \Rightarrow \alpha^* = -1 = \alpha$ .

Einsetzen in erste Gleichung liefert  $\beta^* = 0 = \beta$ .

	$K_1 = \{e\}$	$K_2 = \{c, c^2\}$	$K_3 = \{b, bc, bc^2\}$	
$\chi^{(1)}$	1	1	1	
$\chi^{(2)}$	1	1	-1	(2.5)
$\chi^{(3)}$	2	-1	0	

Konkrete Realisierung der irreduziblen Darstellungen  $D^{(\mu)}$  von  $D_3$  auf  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen (siehe Übung 9, Aufgabe 6.):

	$e$	$c$	$c^2$
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1	1	1
$D^{(3)}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
	$b$	$bc$	$bc^2$
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	-1	-1	-1
$D^{(3)}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Anmerkung: Für  $\mathbb{C}$ -Vektorräume sind Charaktere im Allgemeinen komplexwertige Funktionen. Man kann zeigen, dass für die symmetrischen Gruppen (und dazu isomorphe Gruppen wie  $D_3 \cong S_3$ ) die Werte der Charaktere immer aus  $\mathbb{Z}$  sind.

Weiteres Beispiel: Siehe Übung 10, Aufgabe 1.

## 2.5 Clebsch-Gordan-Zerlegung am Beispiel reduzibler Darstellungen der Gruppe $D_3$

**Beispiel 2.5.1** Als einfaches Beispiel betrachten wir die Zerlegung der regulären Darstellung  $D$  von  $D_3$ . Hierbei benutzen wir

$$\chi(e) = 6, \quad \chi(c) = \chi(c^2) = \chi(b) = \chi(bc) = \chi(bc^2) = 0.$$

Wir wenden nun Satz 2.3.13 an:

$$D = a_1 D^{(1)} \oplus a_2 D^{(2)} \oplus a_3 D^{(3)}$$

mit

$$a_\nu = \frac{1}{6} \sum_g \chi(g) \chi^{(\nu)}(g^{-1}) = \chi^{(\nu)}(e),$$

d. h.

$$D = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus D^{(3)} \oplus D^{(3)}.$$

Test anhand der Dimensionen:  $6 = 1 + 1 + 2 + 2$ .

Weiteres Beispiel: Siehe Übung 10, Aufgabe 2.

Wir diskutieren noch die Clebsch-Gordan-Zerlegung einer inneren Tensorproduktdarstellung, da solche Darstellungen in der Theorie zusammengesetzter Systeme eine zentrale Rolle spielen.

**Beispiel 2.5.2** Gegeben sei eine innere Tensorproduktdarstellung der endlichen Gruppe  $G$  mit

$$D_{ij;i'j'}^{(\mu \times \nu)}(g) = D_{ii'}^{(\mu)}(g) D_{jj'}^{(\nu)}(g).$$

Der Charakter von  $D^{(\mu \times \nu)}$  ergibt sich aus den Einträgen ( $A = 1, \dots, m \cdot n$ )

$$\chi^{(\mu \times \nu)}(g) = D_{AA}^{(\mu \times \nu)}(g) = D_{ii}^{(\mu)}(g) D_{jj}^{(\nu)}(g) = \chi^{(\mu)}(g) \chi^{(\nu)}(g),$$

d. h. der Charakter einer inneren Tensorproduktdarstellung ist gleich dem Produkt der Charaktere.

---

Illustration:  $i = 1, 2, j = 1, 2$ :

$$i = 1, j = 1 \quad : \quad A = 1,$$

$$i = 1, j = 2 \quad : \quad A = 2,$$

$$i = 2, j = 1 \quad : \quad A = 3,$$

$$i = 2, j = 2 \quad : \quad A = 4.$$

$$\begin{aligned}
D_{AA}^{(\mu \times \nu)}(g) &= D_{11}^{(\mu \times \nu)}(g) + \dots + D_{44}^{(\mu \times \nu)}(g) \\
&= D_{11;11}^{(\mu \times \nu)}(g) + D_{12;12}^{(\mu \times \nu)}(g) + D_{21;21}^{(\mu \times \nu)}(g) + D_{22;22}^{(\mu \times \nu)}(g) \\
&= D_{11}^{(\mu)}(g)D_{11}^{(\nu)}(g) + D_{11}^{(\mu)}(g)D_{22}^{(\nu)}(g) \\
&\quad + D_{22}^{(\mu)}(g)D_{11}^{(\nu)}(g) + D_{22}^{(\mu)}(g)D_{22}^{(\nu)}(g) \\
&= [D_{11}^{(\mu)}(g) + D_{22}^{(\mu)}(g)][D_{11}^{(\nu)}(g) + D_{22}^{(\nu)}(g)] \\
&= D_{ii}^{(\mu)}(g)D_{jj}^{(\nu)}(g) = \chi^{(\mu)}(g)\chi^{(\nu)}(g).
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $a_\sigma$  der Clebsch-Gordan-Zerlegung ergeben sich zusammen mit Satz 2.3.13:

$$a_\sigma = \langle \chi^{(\sigma)}, \chi^{(\mu)}\chi^{(\nu)} \rangle.$$

**Beispiel 2.5.3** Sei  $G = D_3$ . Wie lautet z. B. die Zerlegung der inneren Tensorprodukt-Darstellung  $D^{(3)} \otimes D^{(3)}$  in irreduzible Darstellungen von  $D_3$ ?

$$D^{(3 \times 3)} = D^{(3)} \otimes D^{(3)} = a_1 D^{(1)} \oplus a_2 D^{(2)} \oplus a_3 D^{(3)}.$$

Bestimmung der Koeffizienten  $a_\sigma$ . Benutze die Charaktertabelle aus Gl. (2.5):

$$\chi^{(1)} = (1, 1, 1), \quad \chi^{(2)} = (1, 1, -1), \quad \chi^{(3)} = (2, -1, 0)$$

und

$$\chi^{(3)}\chi^{(3)} = (4, 1, 0).$$

$$\begin{aligned}
a_1 = \langle \chi^{(1)}, \chi^{(3)}\chi^{(3)} \rangle &= \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 0) = 1, \\
a_2 &= \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 0) = 1, \\
a_3 &= \frac{1}{6}(1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 0) = 1,
\end{aligned}$$

so dass sich folgende Zerlegung ergibt:

$$D^{(3)} \otimes D^{(3)} = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus D^{(3)}.$$

Weitere Beispiele: Siehe Übung 10, Aufgabe 3.

## 2.6 Beispiel für eine nichtlineare Realisierung

- H. Georgi, *Weak Interactions and Modern Particle Theory*, Benjamin/Cummings, Menlo Park 1984, Kapitel 6.1 und 6.2
- S. Weinberg, Phys. Rev. **166**, 1568 (1968)
- S. Coleman, J. Wess, B. Zumino, Phys. Rev. **177**, 2239 (1969)

Wir betrachten als abstrakte Gruppe das externe direkte Produkt  $G = \text{SU}(N) \times \text{SU}(N) = \{(L, R) | L \in \text{SU}(N), R \in \text{SU}(N)\}$  mit  $N = 2$  oder  $N = 3$ . Ferner sei im Folgenden  $M^4$  der Minkowski-Raum.

Zunächst definieren wir

$$M_1 := \begin{cases} \{\Phi : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 | \phi_i : M^4 \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\} & \text{für } N = 2, \\ \{\Phi : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^8 | \phi_i : M^4 \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\} & \text{für } N = 3. \end{cases}$$

In der Praxis benötigen wir restriktivere Anforderungen an die  $\phi_i$ , um Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen aufstellen zu können.  $M_1$  bildet einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Desweiteren bezeichnen wir mit  $\tilde{\mathcal{H}}(N)$  die Menge aller hermiteschen, spurlosen  $(N, N)$ -Matrizen:

$$\tilde{\mathcal{H}}(N) := \{A \in \underbrace{\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})}_{(N, N)\text{-Matrizen mit Werten in } \mathbb{C}} \mid A^\dagger = -A \wedge \text{Tr}(A) = 0\}.$$

Mit der Matrizenaddition ist  $\tilde{\mathcal{H}}(N)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Wir definieren  $M_2 := \{\phi : M^4 \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}(N) | \phi \text{ stetig}\}$  (Stetigkeit der Einträge). Analog zu 1.4.2 identifizieren wir für  $N = 2$  und  $N = 3$  mit jeder Funktion aus  $M_1$  eine Funktion aus  $M_2$ ,

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^3 \tau_i \phi_i(x) = \begin{pmatrix} \phi_3 & \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_1 + i\phi_2 & -\phi_3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix},$$

$$\text{Pauli-Matrizen: } \tau_i = \tau_i^\dagger, \quad \text{Tr}(\tau_i) = 0,$$

$$\phi_i(x) = \frac{1}{2} \text{Tr}[\tau_i \phi(x)], \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\phi(x) = \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a(x) =: \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}K^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix},$$

$$\text{Gell-Mann-Matrizen: } \lambda_a = \lambda_a^\dagger, \quad \text{Tr}(\lambda_a) = 0,$$

$$\phi_a(x) = \frac{1}{2} \text{Tr}[\lambda_a \phi(x)], \quad a = 1, \dots, 8.$$

Ebenso wie  $M_1$  bildet  $M_2$  mittels Matrizenaddition einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Schließlich sei

$$M_3 := \left\{ U : M^4 \rightarrow \text{SU}(N) \mid U(x) = \exp\left(i \frac{\phi(x)}{F_0}\right), \phi \in M_2 \right\}.$$

$M_3$  ist kein linearer Raum ( $\mathbb{R}$ - oder  $\mathbb{C}$ -VR), da die Summe aus zwei  $\text{SU}(N)$ -Matrizen keine  $\text{SU}(N)$ -Matrix ist.

Elemente von  $\text{SU}(3)$ :

$$U(\Theta_1, \dots, \Theta_8) = \exp\left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a \frac{\lambda_a}{2}\right), \quad \Theta_a \in \mathbb{R}.$$

Gell-Mann-Matrizen:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften:

$$\frac{\lambda_a}{2} = i \frac{\partial U}{\partial \Theta_a} (0, \dots, 0),$$

$$\lambda_a = \lambda_a^\dagger,$$

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab},$$

$$\text{Tr}(\lambda_a) = 0.$$

Vertauschungsrelationen:

$$\left[ \frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}.$$

Nichtverschwindende, vollständig antisymmetrische  
SU(3)-Strukturkonstanten:

$abc$	123	147	156	246	257	345	367	458	678
$f_{abc}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Antivertauschungsrelationen:

$$\{\lambda_a, \lambda_b\} = \frac{4}{3} \delta_{ab} \mathbb{1} + 2d_{abc} \lambda_c.$$

Nichtverschwindende, vollständig symmetrische  $d$ -Symbole der SU(3):

$abc$	118	146	157	228	247	256	338	344
$d_{abc}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$
$abc$	355	366	377	448	558	668	778	888
$d_{abc}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

**Beispiel 2.6.1 (Nichtlineare) Realisierung** von  $SU(N) \times SU(N)$  auf  $M_3$ . Folgender Homomorphismus bildet eine Operation der Gruppe  $G$  auf  $M_3$  (siehe 1.3.1 und Übung 3, Aufgabe 2.):

$$\varphi : G \times M_3 \rightarrow M_3 \quad \text{mit} \quad \varphi[(L, R), U](x) := RU(x)L^\dagger.$$

Denn:

1.  $RUL^\dagger \in M_3$ , da  $U \in M_3$  und  $R, L^\dagger \in \text{SU}(N)$ .
2.  $\varphi[(\mathbb{1}_{N \times N}, \mathbb{1}_{N \times N}), U](x) = \mathbb{1}_{N \times N} U(x) \mathbb{1}_{N \times N} = U(x)$ .
3. Sei  $g_i = (L_i, R_i) \in G \Rightarrow g_1 g_2 = (L_1 L_2, R_1 R_2) \in G$ .

$$\begin{aligned}\varphi[g_1, \varphi[g_2, U]](x) &= \varphi[g_1, (R_2 U L_2^\dagger)](x) = R_1 R_2 U(x) L_2^\dagger L_1^\dagger, \\ \varphi[g_1 g_2, U](x) &= R_1 R_2 U(x) (L_1 L_2)^\dagger = R_1 R_2 U(x) L_2^\dagger L_1^\dagger.\end{aligned}$$

In der Physik schreibt man häufig auch einfach

$$U \mapsto U' = RUL^\dagger.$$

Man spricht von einer nichtlinearen Realisierung, da  $M_3$  kein Vektorraum ist.

Wenn wir mit  $\phi(x) = 0$ , d. h.  $U_0 = \mathbb{1}_{N \times N}$ , den Grundzustand (nach einer spontanen Symmetriebrechung) identifizieren, dann bleibt dieser nur invariant bzgl. Transformationen  $\varphi[g = (V, V), U_0]$  mit  $V \in \text{SU}(N)$ .

**Beispiel 2.6.2 Darstellung von  $\text{SU}(N)$ .** Wenn wir

$$U = \mathbb{1}_{N \times N} + i \frac{\phi}{F_0} - \frac{\phi^2}{2F_0^2} + \dots$$

entwickeln, sehen wir, dass die Realisierung eingeschränkt auf die Untergruppe  $H = \{(V, V) | V \in \text{SU}(N)\} \cong \text{SU}(N)$

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{N \times N} + i \frac{\phi}{F_0} - \frac{\phi^2}{2F_0^2} + \dots &\mapsto V(\mathbb{1}_{N \times N} + i \frac{\phi}{F_0} - \frac{\phi^2}{2F_0^2} + \dots)V^\dagger \\ &= \mathbb{1}_{N \times N} + i \frac{V\phi V^\dagger}{F_0} - \frac{V\phi V^\dagger V\phi V^\dagger}{2F_0^2} + \dots\end{aligned}$$

auf  $M_2 \ni \phi \mapsto V\phi V^\dagger \in M_2$  führt, denn

$$(V\phi V^\dagger)^\dagger = V\phi V^\dagger, \quad \text{Tr}(V\phi V^\dagger) = \text{Tr}(\phi) = 0.$$

Nun gehen wir analog zu 1.4.2 vor und untersuchen die Wirkung auf die Komponenten von  $\Phi \in M_1$ :

$$\phi_i = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tau_i \phi) \mapsto \phi'_i = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tau_i V\phi V^\dagger) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tau_i V \tau_j V^\dagger) \phi_j =: D_{ij}(V) \phi_j$$

und vollkommen analog für  $\text{SU}(3)$  (Ersetzung  $\tau_i \rightarrow \lambda_a$ ). Die Einschränkung der nichtlinearen Realisierung von  $G = \text{SU}(N) \times \text{SU}(N)$  auf die Untergruppe  $H \cong \text{SU}(N)$  induziert eine nichttreue, orthogonale Darstellung von  $\text{SU}(N)$  auf  $M_1$ :

$$\begin{aligned}D : H &\rightarrow \text{O}(3) \quad [\text{O}(8)], \\ h = (V, V) &\mapsto D(V) \quad \text{mit} \quad D(V) : M_1 \rightarrow M_1, \quad \phi_i \mapsto \phi'_i = D_{ij}(V) \phi_j.\end{aligned}$$



Die Homomorphiseigenschaft zeigt man wieder am einfachsten über den Zusammenhang zwischen  $\tilde{\mathcal{H}}(N)$  und  $\mathbb{R}^{N^2-1}$  (vgl. 1.4.2.5.). Denn sei  $h_i = (V_i, V_i) \in H. \Rightarrow h_2 h_1 = (V_2 V_1, V_2 V_1) \in H.$

$$\phi \mapsto V_1 \phi V_1^\dagger \mapsto V_2 (V_1 \phi V_1^\dagger) V_2^\dagger = V_2 V_1 \phi V_1^\dagger V_2^\dagger = (V_2 V_1) \phi (V_2 V_1)^\dagger.$$

Wir zeigen, dass  $D(V)$  eine orthogonale Matrix ist.

$$\begin{aligned} D_{ij}(V) &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\tau_i V \tau_j V^\dagger) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tau_j V^\dagger \tau_i V) = D_{ji}(V^\dagger) \stackrel{V^\dagger = V^{-1}}{=} D_{ji}(V^{-1}) \\ &\Leftrightarrow D(V) = D^T(V^{-1}) \\ &\Leftrightarrow D^T(V) = D(V^{-1}) \stackrel{D \text{ Darstellung}}{=} D^{-1}(V). \end{aligned}$$

$D$  ist nichttreu, da allen  $V \in Z = \{z_n = \exp(\frac{2\pi n i}{N}) \mathbb{1}_{N \times N} | n = 0, 1, \dots, N-1\}$  (Zentrum von  $\text{SU}(N)$ , siehe 1.3.35) die Identität zugeordnet wird.

**Beispiel 2.6.3** Nichtlineare Realisierung der chiralen Symmetrie ( $\text{SU}(3) \times \text{SU}(3)$ ). Gesucht sei die Lagrange-Dichte zur Beschreibung der Dynamik acht pseudoskalarer (Goldstone-) Bosonen. Als dynamische Felder benutzen wir

$$\begin{aligned} U(x) &= \exp\left(i \frac{\phi(x)}{F_0}\right), \\ \phi(x) &= \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a(x) = \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}K^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Die allgemeinste, chiral invariante Lagrange-Dichte mit der minimalen Anzahl an Ableitungen lautet

$$\mathcal{L} = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger). \quad (2.7)$$

1.  $\mathcal{L}$  ist invariant (Gruppeninvariante, siehe 1.3.4) bzgl.  $U(x) \mapsto RU(x)L^\dagger$ , wobei  $(L, R) \in \text{SU}(3) \times \text{SU}(3)$ . Denn:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\mapsto \frac{F_0^2}{4} \text{Tr} \{ \partial_\mu [RU(x)L^\dagger] \partial^\mu [RU(x)L^\dagger]^\dagger \} \\ &= \frac{F_0^2}{4} \text{Tr} \{ \partial_\mu [RU(x)L^\dagger] \partial^\mu [LU^\dagger(x)R^\dagger] \} \\ &= \frac{F_0^2}{4} \text{Tr} \left\{ R [\partial_\mu U(x)] \underbrace{L^\dagger L}_1 [\partial^\mu U(x)] R^\dagger \right\} = \mathcal{L}. \end{aligned}$$

2. Die multiplikative Konstante  $F_0^2/4$  bewirkt, dass der kinetische Anteil die Standardform

$$\frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a$$

hat (Siehe Übung 10, Aufgabe 4.). Beachte  $\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}$ .

3. Physikalische Bedeutung von  $F_0$ :  $F_0 \approx 93$  MeV ist der Grenzwert der Pionzerfallskonstante für verschwindende Quarkmassen  $m_u$ ,  $m_d$  und  $m_s$ .

# Kapitel 3

## Kontinuierliche Gruppen: Lie-Gruppen und Lie-Algebren

### 3.1 Lie-Gruppen

**Vorbemerkung 3.1.1** Betrachte eine endliche Gruppe  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ . Bezeichne die Elemente durch

$$g(a) := g_a,$$

wobei der Parameter  $a$  die Werte  $1, 2, \dots, n$  annehmen kann. Es sei nun  $M := \{1, \dots, n\}$ . Die Struktur der Gruppe wird durch die Angabe aller Produkte vollständig beschrieben (z. B. Gruppentafel):

$$g(a)g(b) = g(c), \quad a, b, c \in M,$$

d. h. die Gruppentafel definiert eine Funktion  $\phi : M \times M \rightarrow M$ :

$$c = \phi(a; b).$$

Wir betrachten nun den Übergang von diskreten Parametern  $a = 1, \dots, n$  zu einem Satz kontinuierlicher Parameter.

**Definition 3.1.2** Eine Gruppe  $G$  heißt **kontinuierliche Gruppe in  $r$  Parametern**, wenn ihre Elemente von  $r$  reellen kontinuierlichen Variablen abhängen und nicht mehr als  $r$  solcher Parameter zur Beschreibung notwendig sind.

Man spricht auch von  $r$  wesentlichen Parametern (siehe Diskussion in Hamermesh, Kapitel 8-3). Bisweilen bezeichnet man  $r$  als Dimension der kontinuierlichen Gruppe  $G = \{g(a) | a = (a_1, \dots, a_r)\}$ . Die Gruppenmultiplikation wird folgendermaßen beschrieben:

$$g(c) = g(a)g(b), \quad c = \phi(a; b),$$

wobei

$$\phi_i(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_r), \quad i = 1, \dots, r,$$

reelle Funktionen von reellen Parametern sind. Die Gruppenmultiplikation ordnet einem (geordneten) Paar zweier Punkte der so genannten Gruppenmannigfaltigkeit einen Punkt der Gruppenmannigfaltigkeit zu. Wähle  $a$  so, dass  $a = 0$  der Identität entspricht.

Für die folgenden Überlegungen ist der Abstandsbegriff von zentraler Bedeutung.

**Definition 3.1.3** Eine nichtleere Menge  $M$  heißt genau dann ein metrischer Raum, wenn zwei beliebigen Punkten  $u, v \in M$  eine reelle Zahl  $d(u, v) \geq 0$  zugeordnet ist, so dass für alle  $u, v, w \in M$  gilt:

1.  $d(u, v) = 0$  genau dann, wenn  $u = v$ ;
2.  $d(u, v) = d(v, u)$  (Symmetrie);
3.  $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$  (Dreiecksungleichung).

$d(u, v)$  heißt der Abstand zwischen den beiden Punkten  $u$  und  $v$ , das Paar  $(M, d)$  wird metrischer Raum genannt.

Für uns relevant:

1. Jede Teilmenge eines metrischen Raums wird bzgl.  $d(\cdot, \cdot)$  auch zu einem metrischen Raum.
2. Normierte Räume, Hilbert- und Banach-Räume sind metrische Räume:

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

**Satz 3.1.4 zur Charakterisierung wichtiger topologischer Begriffe durch Konvergenz** (ohne Beweis). Es sei  $N$  eine Teilmenge eines metrischen Raumes  $M$ . Dann gilt:

1.  $u_n \rightarrow u$  für  $n \rightarrow \infty$  genau dann, wenn  $d(u_n, u) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .
2. Das Grenzelement einer konvergenten Folge ist eindeutig.
3.  $N$  ist genau dann *abgeschlossen*, wenn aus  $u_n \rightarrow u$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $u_n \in N$  für alle  $n$  stets auch  $u \in N$  folgt.
4.  $N$  ist genau dann *relativ kompakt*, wenn jede Folge in  $N$  eine konvergente Teilfolge enthält.
5.  $N$  ist genau dann *kompakt*, wenn jede Folge in  $N$  eine konvergente Teilfolge enthält, deren Grenzelement zu  $N$  gehört.

Die für uns relevante Ersetzung lautet:

1. Metrischer Raum  $M \rightarrow M_n(\mathbb{K})$  (Menge aller  $(n, n)$ -Matrizen über  $\mathbb{K}$ )  
 $\cong \mathbb{K}^{n^2}$ ; Abstand:

$$d(A, B) = \|A - B\| = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij} - b_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Teilmenge  $N \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$  (Menge aller invertierbarer  $(n, n)$ -Matrizen über  $\mathbb{K}$ ).

**Definition 3.1.5** 1. Die Gruppe  $G$  sei Teilmenge eines metrischen Raumes  $(M, d)$ . Sind die Gruppenoperationen  $G \times G \ni (a, b) \mapsto ab \in G$  und  $G \ni a \mapsto a^{-1} \in G$  stetig bzgl. der Metrik  $d$ , so heißt  $G$  eine **topologische Gruppe**.

2.  $G$  heißt kompakt, wenn  $G$  als Teilmenge von  $M$  kompakt ist.  
 Beispiele:  $O(n)$ ,  $U(n)$ .
3.  $G$  heißt lokal kompakt, wenn  $e \in G$  eine relativ kompakte Umgebung hat.

Beispiel: Lorentz-Gruppe.

Aber: Die Lorentz-Gruppe ist nicht kompakt, da der Abstand zwischen einer speziellen Transformation und der Identität beliebig groß werden kann.

**Definition 3.1.6 Lie-Gruppe.** Sind die Funktionen  $\phi_i$  einer kontinuierlichen Gruppe in  $r$  Parametern analytisch, d. h. jedes  $\phi_i$  lässt sich für jedes  $a, b$  in eine konvergente Potenzreihe entwickeln, spricht man von einer  $r$ -Parameter-Lie-Gruppe.

Im Folgenden betrachten wir nur noch Lie-Gruppen.

**Beispiele 3.1.7** 1. Translation des  $\mathbb{R}^n$ .  $n$ -Parameter-Lie-Gruppe:

$$T(b) : x' = x + b$$

mit  $b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ .

$$c_i = \phi_i(a; b) = a_i + b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

2.  $GL(n, \mathbb{C})$ : Allgemeine lineare Gruppe komplexer, regulärer  $(n, n)$ -Matrizen. Dimension:  $2n^2$ .
3.  $U(n)$ : Untergruppe der unitären Matrizen von  $GL(n, \mathbb{C})$ .  $U \in U(n) : U^\dagger U = \mathbb{1}_{n \times n}$ , d. h.:

$$\text{Spalten orthogonal für } i \neq j : \sum_{k=1}^n U_{ki}^* U_{kj} = 0, \quad (a)$$

$$\text{Spalten normiert für } i = 1, \dots, n : \sum_{k=1}^n U_{ki}^* U_{ki} = 1. \quad (b)$$

Anzahl der Bedingungen:

- (a)  $(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$  komplexwertige Bedingungen.  
 (b)  $n$  reellwertige Bedingungen.

$\Rightarrow n(n-1) + n = n^2$  Bedingungen.  $\Rightarrow 2n^2 - n^2 = n^2$  reelle Parameter.  
 U(1): 1, U(2): 4, U(3): 9, usw.

4.  $O(n, \mathbb{R}) =: O(n)$ : Untergruppe der orthogonalen Matrizen von  $GL(n, \mathbb{R})$ .  $R \in O(n) : R^T R = \mathbb{1}_{n \times n}$ .  $n(n-1)/2$  reelle Parameter (siehe Übung 11, Aufgabe 1.). O(2): 1, O(3): 3, O(4): 6, usw.

Für Lie-Gruppen eignet sich „Nähe“ im Parameterraum (Gruppenmannigfaltigkeit) als Kriterium für „Nähe“ der Gruppenelemente.

**Illustration 3.1.8** Wir betrachten die Gruppe

$$SO(2) := \{A \in GL(2, \mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{1}_{2 \times 2} \wedge \det(A) = 1\}.$$

Als Skalarprodukt zweier (reeller) Matrizen definieren wir

$$\langle A, B \rangle := \sum_{i,j=1}^2 A_{ij} B_{ij}.$$

Dieses induziert die (kanonische) Norm

$$\|A\| := \sqrt{\langle A, A \rangle}$$

und schließlich den Abstand zweier Matrizen

$$d(A, B) := \|A - B\| = \left[ \sum_{i,j=1}^2 (A_{ij} - B_{ij})^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Wir parametrisieren zwei Elemente  $A$  und  $B$  aus  $SO(2)$  durch ihre Drehwinkel  $\alpha$  und  $\beta$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi,$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \beta < 2\pi$$

und betrachten den Abstand

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \left\{ [\cos(\alpha) - \cos(\beta)]^2 + [-\sin(\alpha) + \sin(\beta)]^2 \right. \\ &\quad \left. + [\sin(\alpha) - \sin(\beta)]^2 + [\cos(\alpha) - \cos(\beta)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ 2[\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) \right. \\ &\quad \left. - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) - 2\sin(\alpha)\sin(\beta)] \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\sqrt{1 - \cos(\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

Wie erwartet, geht für ein fest vorgegebenes  $\alpha$  der Abstand zwischen  $A$  und  $B$  gegen Null, wenn  $\alpha \rightarrow \beta$ .

**Definition 3.1.9** Es sei  $I$  ein Intervall. Eine stetige Abbildung  $\mathbb{R} \supseteq I : t \mapsto g(t) \in G$  heißt Kurve oder Pfad in  $G$ .

**3.1.10** Damit ist

$$\{g(a(t)) | t \in I \subseteq \mathbb{R} \wedge a(t) \text{ stetig}\}$$

ein Pfad.

**Definition 3.1.11** 1. Zwei Elemente  $g_1, g_2 \in G$  heißen zusammenhängend, wenn sie durch einen Pfad verbunden werden können.

2.  $G$  heißt zusammenhängend, wenn jedes  $g \in G$  mit  $e$  durch eine stetige Kurve in  $G$  verbunden werden kann.

**Beispiel 3.1.12**  $O(3)$  ist nicht zusammenhängend.

Beweis durch Widerspruch: Seien  $g, h \in O(3)$  zusammenhängend mit  $\det(g) = 1$  und  $\det(h) = -1$ .  $\Rightarrow \exists$  stetiges  $s : [0, 1] \rightarrow O(3)$  mit  $s(0) = g$  und  $s(1) = h$ .  $\Rightarrow \det[s(t)]$  stetig.  $\Rightarrow$  konstant, d. h.  $\det(g) = \det(h)$ . Widerspruch zur Annahme.

**Satz 3.1.13 Zusammenhangskomponente des Einselementes einer Lie-Gruppe  $G$ .** Sei  $U = \{g(a) \in G | |a_i| < \epsilon, \epsilon > 0\}$ , so dass für  $g \in U \Rightarrow g^{-1} \in U$ . (Beachte:  $U$  keine Gruppe). Wir definieren die Komplexprodukte (siehe 1.3.22)

$$U^1 := U, U^2 = UU, U^3 = UUU, \dots$$

Behauptung:  $G_0 = U \cup U^2 \cup U^3 \cup \dots$  ist eine Gruppe und wird als Zusammenhangskomponente des Einselementes bezeichnet.

Illustration:  $G_0 = U(1) = \{e^{i\theta}\}$ .  $U = \{e^{ia} | |a| < \epsilon\}$ .

Beweis:

- $G_0$  ist eine Gruppe:
  - Abgeschlossenheit:  $s_k \in U^k, s_l \in U^l \Rightarrow s_k s_l \in U^{k+l}$ .
  - Assoziativität aus  $G$ .
  - Einselement:  $e \in U$ .
  - Inverses Element:  $g \in G_0 \Rightarrow g = g_1 g_2 \dots g_k \in U^k$  für ein  $k$  mit  $g_i \in U$ .  $\Rightarrow g^{-1} = g_k^{-1} \dots g_1^{-1}, g_i \in U \Rightarrow g_i^{-1} \in U \Rightarrow g^{-1} \in U^k$ .
  - Ohne Beweis:  $G_0$  hängt nicht von der Wahl von  $U$  ab.

- $G_0$  ist zusammenhängend:

Seien  $g_1, g_2 \in G_0$ . Z. z.:  $g_1$  und  $g_2$  zusammenhängend. Es genügt zu zeigen, dass  $g_i$  und  $e$  zusammenhängend sind. Sei  $g(a) \in U \Rightarrow g(ta) \in U$  für  $0 \leq t \leq 1$ . Für jedes  $g \in G_0$  gilt:

$$g = g(a)g(b)g(c) \dots$$

mit  $g(a), g(b), \dots \in U$ . Pfad  $s(t) = g(ta)g(tb) \dots$  verbindet  $e$  mit  $g$ .

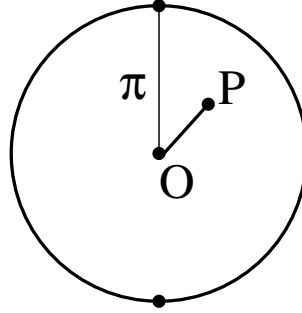


Abbildung 3.1: Parameterraum zur Beschreibung von  $SO(3)$ .

**Beispiel 3.1.14**  $G_0 = SO(3)$ . Jedes  $g \in G_0$  lässt sich als Rotation um  $\hat{n}$  mit Drehwinkel  $\theta$  interpretieren. Betrachte Kugel mit Radius  $\pi$ . Auf der Kugeloberfläche diametral gegenüberliegende Punkte repräsentieren dieselbe Drehung:  $R(\hat{n}, \pi) = R(-\hat{n}, \pi)$ .  $U = \{P | OP < \epsilon\}$ .

**Beispiele 3.1.15** • Die Translationsgruppe des  $\mathbb{R}^n$  ist nicht kompakt aber einfach zusammenhängend.

- $O(3)$  ist kompakt, aber nicht zusammenhängend:  $O(3) = SO(3) \cup PSO(3)$ .  $P$  Parität.
- $U(n)$ : kompakt und zusammenhängend.
- $SU(n)$ : kompakt und einfach zusammenhängend.

Begriff: Eine Teilmenge  $M$  eines topologischen Raumes heißt genau dann **einfach zusammenhängend**, wenn  $M$  zusammenhängend ist und sich jede geschlossene stetige Kurve in  $M$  auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

Gegenbeispiel:  $e^{i\phi}$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$ , entspricht dem Rand  $S^1$  des Einheitskreises und lässt sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen.

## 3.2 Invariante Integration

**Vorbemerkung 3.2.1** Sei  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  eine endliche Gruppe. Für  $M \subseteq G$  gilt

$$\sum_{g \in M} f(g) = \sum_{g \in hM} f(h^{-1}g) = \sum_{g \in Mh} f(gh^{-1}).$$

Jedes  $g \in G$  geht mit gleichem Gewicht ein. Für  $G = M$  gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} f(g) &= \sum_{i=1}^n f(g_i) = \sum_{i=1}^n f(h^{-1}g_i) = \sum_{g \in G} f(h^{-1}g) \\ &= \sum_{i=1}^n f(g_i h^{-1}) = \sum_{g \in G} f(gh^{-1}). \end{aligned} \tag{3.1}$$



Die Eigenschaft (3.1) wurde im Beweis des Satzes 2.3.3 über die fundamentale Orthogonalitätsrelation für Matrizen irreduzibler Darstellungen verwendet.

- Gesucht: Verallgemeinerung für Lie-Gruppen.

Verknüpfe mit Umgebungen der Elemente  $g$  und  $hg$  ein *linksinvariantes* Maß mit der definierenden Eigenschaft

$$d\mu_L(g) = d\mu_L(hg), \quad (3.2)$$

so dass gilt:

$$\int_M d\mu_L(g)f(g) = \int_{hM} d\mu_L(hg)f(h^{-1}g) \stackrel{(3.2)}{=} \int_{hM} d\mu_L(g)f(h^{-1}g).$$

Für  $M = G$  entspricht

$$\int_G d\mu_L(g)f(g) = \int_G d\mu_L(g)f(h^{-1}g)$$

gerade

$$\sum_{g \in G} f(g) = \sum_{g \in G} f(h^{-1}g).$$

(Analog für ein rechtsinvariantes Maß.)

- Konstruktion

Sei  $g = g(a)$ ,  $M$  eine Umgebung von  $g$  mit  $d\mu_L(g) = \rho_L(a)d^r a$ ,  $h = g(b)$  und  $g(c) = g(b)g(a)$  mit  $c = \phi(b; a)$ . Wir fordern

$$\rho_L(a)d^r a = d\mu_L(g) \stackrel{(3.2)}{=} d\mu_L(hg) = \rho_L(c)d^r c.$$

- Bestimmung der Dichtefunktion  $\rho_L$

Sei  $M$  eine Umgebung des Einselements mit Volumen  $da_1 \dots da_r$ . Links-translation von  $M$  durch  $g(b)$  liefert eine Umgebung  $M' = g(b)M$ . Wegen  $g(b) = g(\phi(b; 0))$  gilt

$$db_1 \dots db_r = \det \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1(b; a)}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1(b; a)}{\partial a_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_r(b; a)}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial \phi_r(b; a)}{\partial a_r} \end{pmatrix}}_{J_L(b)} \Big|_{a=0} da_1 \dots da_r.$$

$\rho_L(0)$  kann beliebig festgelegt werden. Setze

$$\rho_L(b) = \frac{\rho_L(0)}{J_L(b)} \quad \Rightarrow \quad \rho_L(b)d^r b = \frac{\rho_L(0)}{J_L(b)} \underbrace{d^r b}_{J_L(b)d^r a} = \rho_L(0)d^r a.$$

**Anmerkungen 3.2.2** • Konsistenz der Definition: Übergang vom Volumenelement in der Nähe von beliebigem  $a$  zu beliebigem  $c$  mittels  $b : c = \phi(b; a)$ :

$$M_{g(c)} = g(b)M_{g(a)} = g(b)g(a)g^{-1}(a)M_{g(a)} = g(c)g^{-1}(a)M_{g(a)}.$$

1. Inverse Transformation zu  $a$ :  $a \rightarrow 0$ .
2.  $0 \rightarrow c$ .
3. Definition für jeden einzelnen Schritt gültig und damit auch für das Hintereinanderausführen (siehe Abbildung 3.2).

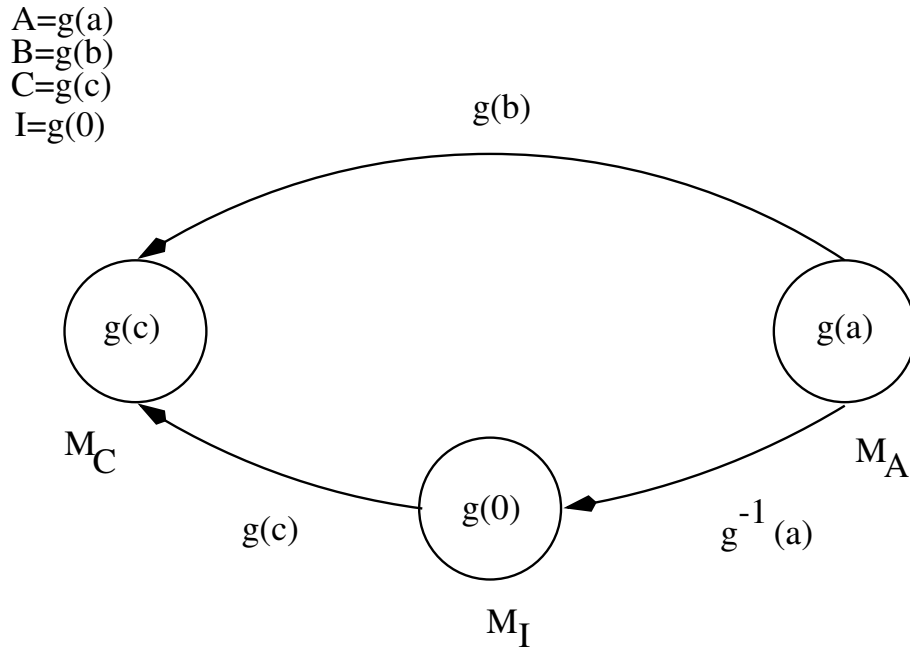


Abbildung 3.2: Linkstranslation einer Umgebung  $M_A$  von  $g(a)$  nach einer Umgebung  $M_C$  von  $g(c)$  (1) in einem Schritt durch  $g(b)$  und (2) in zwei Schritten  $g^{-1}(a)$  zu einer Umgebung  $M_I$  der Identität und anschließend durch  $g(c)$  nach  $M_C$ .

- Eindeutigkeit bis auf multiplikative Konstante.
- Konstruktion für rechtsinvariantes Maß analog: Sei  $M$  eine Umgebung des Einselementes mit Volumen  $da_1 \dots da_r$ . Rechtstranslation durch  $g(b)$  liefert  $M' = Mg(b)$ , wobei  $g(b) = g(\phi(0; b))$ .

$$db_1 \dots db_r = \det \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1(a;b)}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1(a;b)}{\partial a_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_r(a;b)}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial \phi_r(a;b)}{\partial a_r} \end{pmatrix}}_{J_R(b)} \Big|_{a=0} da_1 \dots da_r.$$

Setze  $\rho_R(b) = \frac{\rho_R(0)}{J_R(b)}$ .

- $\int_G d\mu_{L/R}(g)f(g)$  heißt links-/rechtsinvariantes Haar-Integral.
- Im. Allg. sind links- und rechtsinvariante Haar-Integrale verschieden.
- Ohne Beweis:
  1. Lie-Gruppe  $G$  kompakt  $\Leftrightarrow V = \int_G d\mu_L(g)$  existiert.
  2.  $V$ : „Volumen der Gruppe“.
  3. Für kompakte Lie-Gruppen stimmen links- und rechtsinvariantes Maß überein, d. h.

$$d\mu_L(g) = d\mu_R(g) = d\mu(g).$$

- In den obigen Betrachtungen sind wir davon ausgegangen, dass  $a = 0$  dem Einselement in der Gruppe entspricht. Sind die Parameter so gewählt, dass stattdessen  $a = a_0$  für das Einselement gilt, so ist in den obigen Formeln  $0$  durch  $a_0$  und „ $a = 0$ “ durch „ $a = a_0$ “ zu ersetzen. (Beispiel: Siehe Übung 11, Aufgabe 3.)

**Beispiele 3.2.3** 1.  $x' = x + a$ ,  
 $c = \phi(a; b) = a + b$ ,  
 $J_L(b) = 1$ ,  
 $V = \int_{-\infty}^{\infty} db = \infty$ , nicht kompakt.

2.  $G = U(1) = \{e^{i\theta} | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ ,  
 $\phi(a; b) = a + b$ ,  
 $d\mu_L(g(\theta)) = d\theta = d\mu_R(g(\theta))$ ,  
 $V = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ , kompakt.

3. Lorentz-Gruppe in  $1 + 1$  Dimensionen:

$$\begin{pmatrix} \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) \\ \sinh(\lambda) & \cosh(\lambda) \end{pmatrix}, \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

$g(\lambda_2)g(\lambda_1) = g(\lambda_2 + \lambda_1)$ ,  
 $\phi(\lambda_2; \lambda_1) = \lambda_2 + \lambda_1$ ,  
 $(\partial\phi(\lambda_2; \lambda_1)/\partial\lambda_1)_{\lambda_1=0} = 1$ ,  
 $V = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda = \infty$ , nicht kompakt.

4. (Ohne Beweis) Invariante Integration für  $SO(3)$ :

Wir beschreiben  $R \in SO(3)$  durch Euler-Winkel,

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_3(\alpha)R_2(\beta)R_3(\gamma).$$

Dann gilt:

$$d\mu_L(R) = d\alpha \sin(\beta)d\beta d\gamma = d\mu_R(R),$$

$$\Rightarrow V = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin(\beta)d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma = 8\pi^2.$$

Vorbemerkung: Im Folgenden sei  $G$  eine kompakte Lie-Gruppe. Wir betrachten stetige, endlichdimensionale Darstellungen  $\Gamma = \{D(g)\}$ , d. h. jedes  $D_{ij}(g)$  ist stetig in  $g$ ,  $g$  stetig in  $a$ . Der Beweis der folgenden Sätze erfordert die Ersetzungen

$$\sum_g \rightarrow \int_G d\mu(g), \quad |G| \rightarrow V$$

in Kapitel 2.3.

**Satz 3.2.4** 1. 2.2.8 - 2.2.10: Jede endlichdimensionale Darstellung einer kompakten Lie-Gruppe ist äquivalent zu einer unitären Darstellung. Sie kann daher vollständig in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen zerlegt werden.

2. 2.3.3: Seien  $\Gamma^{(\alpha)} = \{D^{(\alpha)}(g)\}$  nichtäquivalente, irreduzible, unitäre, endlichdimensionale Darstellungen mit Dimension  $n_\alpha$ . Dann gilt

$$\int_G d\mu(g) D_{ir}^{(\alpha)}(g) D_{js}^{(\beta)*}(g) = \frac{V}{n_\alpha} \delta^{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta_{rs}.$$

3. 2.3.6: Sei  $\chi^{(\alpha)}$  Charakter von  $\Gamma^{(\alpha)}$ :

$$\int_G d\mu(g) \chi^{(\alpha)}(g) \chi^{(\beta)*}(g) = V \delta^{\alpha\beta}.$$

4. 2.3.13: Sei  $\Gamma = \bigoplus_\alpha f_\alpha \Gamma^{(\alpha)}$ , wobei  $f_\alpha$  die Multiplizität von  $\Gamma^{(\alpha)}$  in  $\Gamma$  bezeichnet. Dann gilt

$$f_\alpha = \frac{1}{V} \int_G d\mu(g) \chi^{(\alpha)*}(g) \chi(g),$$

wobei  $\chi$  der Charakter von  $\Gamma$  ist.

5. 2.3.17: Frobenius-Kriterium für Irreduzibilität:

Eine endlichdimensionale Darstellung  $\Gamma$  mit Charakter  $\chi$  ist irreduzibel genau dann, wenn  $\int_G d\mu(g) \chi^*(g) \chi(g) = V$ .

**Beispiel 3.2.5**  $G = U(1) = \{\exp(i\theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . Die Abbildung  $\exp(i\theta) \mapsto D^{(n)}(\theta) = \exp(in\theta)$  definiert für jedes  $n \in \mathbb{Z}$  eine irreduzible Darstellung  $\Gamma^{(n)}$ .  $d\mu = d\theta$ ,  $V = 2\pi$ .

$$\int_0^{2\pi} d\theta D^{(m)}(\theta) D^{(n)*}(\theta) = \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(m-n)\theta} = 2\pi \delta_{mn}.$$

Wir betrachten zur Illustration

$$\begin{aligned} \Gamma &= \begin{pmatrix} \Gamma^{(k)} & 0 \\ 0 & \Gamma^{(m)} \end{pmatrix} = \Gamma^{(k)} \oplus \Gamma^{(m)}, \\ D(\theta) &= \begin{pmatrix} e^{ik\theta} & 0 \\ 0 & e^{im\theta} \end{pmatrix}, \\ \chi(\theta) &= e^{ik\theta} + e^{im\theta}, \\ f_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-in\theta} (e^{ik\theta} + e^{im\theta}) = \delta_{nk} + \delta_{nm}. \end{aligned}$$

**Beispiel 3.2.6** Gegeben seien die irreduziblen Darstellungen der  $SO(3)$  aus Beispiel 2.1.2:

$$\begin{aligned} D_{mm'}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \langle l, m | \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) | l, m' \rangle^*, \\ \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) &= \exp(-i\alpha l_z) \exp(-i\beta l_y) \exp(-i\gamma l_x), \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} l &= 0, 1, \dots, \\ m &= -l, -l+1, \dots, l-1, l, \\ m' &= -l, -l+1, \dots, l-1, l. \end{aligned}$$

Diese erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin(\beta) d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma D_{m_1 m_1'}^{(l_1)*}(\alpha, \beta, \gamma) D_{m_2 m_2'}^{(l_2)}(\alpha, \beta, \gamma) = \\ \frac{8\pi^2}{2l_1 + 1} \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2} \delta_{m_1' m_2'}. \end{aligned}$$

### 3.3 Lie-Algebren

**Definition 3.3.1** Eine **Algebra**  $A$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, der abgeschlossen bzgl. einer bilinearen Multiplikation ist:

$$\begin{aligned} x, y \in A, \quad x \cdot y &:= xy \in A \\ (\alpha x + \beta y)z &= \alpha xz + \beta yz, \\ x(\alpha y + \beta z) &= \alpha xy + \beta xz, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y, z \in A. \end{aligned}$$

**Beispiele 3.3.2** 1. Matrizenalgebra in  $n$  Dimensionen (assoziative Algebra:  $(AB)C = A(BC)$ ).

2. Drehimpulsalgebra  $\{\sum_{i=1}^3 \xi_i J_i | \xi_i \in \mathbb{C}\}$  mit Produkt  $J \cdot J' := [J, J']$ , wobei

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k.$$

Das Produkt ist nicht assoziativ (siehe Übung 11, Aufgabe 6.):

$$[J_i, [J_j, J_k]] \neq [[J_i, J_j], J_k].$$

**Definition 3.3.3** Eine **Lie-Algebra**  $\mathcal{L}$  hat die zusätzlichen Eigenschaften

$$\begin{aligned} \text{Antikommutativität:} \quad L \cdot L' &= -L' \cdot L, \\ \text{Jacobi-Identität:} \quad J \cdot (K \cdot L) &+ K \cdot (L \cdot J) + L \cdot (J \cdot K) = 0. \end{aligned}$$

Üblicherweise verwendet man für das Lie-Produkt die Klammerschreibweise  $[L, L']$ .

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ : Reelle Lie-Algebra.
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ : Komplexe Lie-Algebra.
- Jede komplexe Lie-Algebra ist gleichzeitig auch eine reelle Lie-Algebra. (Jeder  $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist auch ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, da  $\mathbb{C}$  den Teilkörper  $\mathbb{R}$  enthält.)

**Definition 3.3.4** Es sei  $\mathcal{L}$  eine Lie-Algebra mit Basis  $\{L_\alpha\}$ . Wegen  $[L, L'] \in \mathcal{L}$  gilt

$$[L_\alpha, L_\beta] = C_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma,$$

wobei  $C_{\alpha\beta\gamma}$  als Strukturkonstanten der Lie-Algebra in der entsprechenden Basis bezeichnet werden.

Die Strukturkonstanten erfüllen (siehe Übung 12, Aufgabe 1.)

- $C_{\alpha\beta\gamma} = -C_{\beta\alpha\gamma}$ ,
- $C_{\beta\gamma\mu} C_{\alpha\mu\delta} + C_{\gamma\alpha\mu} C_{\beta\mu\delta} + C_{\alpha\beta\mu} C_{\gamma\mu\delta} = 0$ .

**Definition 3.3.5** Es sei  $\mathcal{L}$  eine Lie-Algebra über  $\mathbb{K}$  und  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -VR. Unter einer **Darstellung**  $\Psi$  von  $\mathcal{L}$  verstehen wir einen Morphismus

$$\Psi : \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{gl}(V, \mathbb{K}),$$

d. h. jedem Element  $A$  der Lie-Algebra  $\mathcal{L}$  wird ein linearer Operator  $\Psi(A) : V \rightarrow V$  zugeordnet mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha A + \beta B) &= \alpha \Psi(A) + \beta \Psi(B), \\ \Psi([A, B]) &= [\Psi(A), \Psi(B)]. \end{aligned}$$

$\Psi$  heißt genau dann treu, wenn  $\Psi$  injektiv ist. Die Dimension des VR,  $\dim(V)$ , wird als Dimension der Darstellung bezeichnet.

**Definition 3.3.6** Die Begriffe „äquivalent“, „vollständig reduzibel“ und „irreduzibel“ werden analog wie für Gruppen definiert (siehe 2.2.1, 2.2.6, 2.2.7).

**Definition 3.3.7** Sei  $\mathcal{L}$  eine Lie-Algebra mit Basis  $\{L_\alpha\}$  und  $\Psi$  eine Darstellung. Ein Polynom in den  $\Psi(L_\alpha)$ , das mit allen  $\Psi(L)$ ,  $L \in \mathcal{L}$ , vertauscht, wird als **Casimir-Operator** bezeichnet.

**Beispiel 3.3.8** Drehimpulsoperatoren  $[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k$ ,  $\vec{L}^2 = \sum_{i=1}^3 L_i L_i$ .

**Definition 3.3.9** Als Rang einer Lie-Algebra  $\mathcal{L}$  bezeichnet man die maximale Anzahl linear unabhängiger Elemente von  $\mathcal{L}$ , die miteinander vertauschen. Beispiel:  $n-1$  für  $\mathfrak{su}(n)$ .

## 3.4 Zusammenhang zwischen Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Im Folgenden betrachten wir die so genannten klassischen (Matrix-) Gruppen (auch klassische Lie-Gruppen genannt).

**Vorbemerkung 3.4.1** Es sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Betrachte einen  $n$ -dimensionalen  $\mathbb{K}$ -VR  $V_n$  mit Basis

$$B = \{e_1, \dots, e_n\}.$$

Die so genannten allgemeinen linearen Gruppen  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  und  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  der regulären  $(n, n)$ -Matrizen über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  lassen sich (aktiv) als invertierbare, lineare Abbildungen auf dem zugrundeliegenden VR interpretieren:

$$Ae_i = A_{ji}e_j.$$

( $A_{ji}$  ist der Entwicklungskoeffizient des Bildes  $Ae_i$  von  $e_i$  nach den Basisvektoren.) Interpretiere  $A_{ji}$  als Eintrag in der  $j$ -ten Zeile und  $i$ -ten Spalte einer invertierbaren  $(n, n)$ -Matrix.

---

Für

$$V_n \ni x = x_i e_i$$

gilt

$$y = Ax = x_i Ae_i = x_i A_{ji} e_j =: y_j e_j,$$

d. h. für die Komponenten

$$y_j = A_{ji} x_i.$$

Da man die Bilder  $Ae_i$  auch als neue Basisvektoren interpretieren kann,

$$f_i = Ae_i,$$

gilt auch

$$Ax = x_i Ae_i = x_i f_i.$$

Zusammengefasst:

$$\begin{aligned} f_i &= e_j A_{ji}, \\ y_j &= A_{ji} x_i. \end{aligned}$$

---

Die anderen klassischen Gruppen ergeben sich als Untergruppen mittels weiterer Anforderungen.

Beispiele:

- $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ :  $\det(A) > 0$  (Zusammenhangskomponente des Einselements in  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ).

- Die speziellen linearen Gruppen  $SL(n, \mathbb{R})$  und  $SL(n, \mathbb{C})$  beinhalten die zusätzliche Forderung  $\det(A) = 1$ .
- $SL_1(n, \mathbb{C})$ :  $\det(A) \in \mathbb{R}$ .
- $SL_2(n, \mathbb{C})$ :  $|\det(A)| = 1$ .

**Satz 3.4.2** (Ohne Beweis:) Wir betrachten die klassischen Lie-Gruppen  $G$  bezüglich des Matrizenprodukts  $AB$  mit den zugehörigen reellen Lie-Algebren  $\mathcal{L}G$  bezüglich der Klammeroperation  $[C, D] := CD - DC$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Exponentialabbildung: Für alle  $C \in \mathcal{L}G$  gilt

$$\exp(C) \in G.$$

2. Tangentialraum im Einselement  $I$  von  $G$ :

Ist  $A = A(t)$  eine stetig differenzierbare Kurve in  $G$ , die durch das Einselement  $I$  geht\*, dann gilt

$$A'(0) \in \mathcal{L}G.$$

\*:  $t \rightarrow A(t)$  ist eine  $C^1$ -Abbildung, d. h. jedes Matrixelement ist als Funktion von  $t$  stetig differenzierbar, mit  $A(t) \in G \forall t \in [-\epsilon, \epsilon]$  bei festem  $\epsilon > 0$  und  $A(0) = I$ .

Umgekehrt existiert zu jeder Matrix  $C \in \mathcal{L}G$  eine derartige Kurve, nämlich

$$A(t) = \exp(tC) \quad (\text{Taylor-Reihenentwicklung} + \text{Differentiation}).$$

3. Zusammenhang zwischen Gruppenmultiplikation und Lie-Produkt:

Für alle  $C, D \in \mathcal{L}G$  und  $t \in \mathbb{R}$  gilt (siehe Übung 12, Aufgabe 5.)

$$\exp(tC) \exp(tD) \exp(-tC) \exp(-tD) = I + t^2[C, D] + \mathcal{O}(t^3), \quad t \rightarrow 0.$$

4.  $G$  ist eine  $d$ -dimensionale (siehe Tabelle) reelle  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, und  $\mathcal{L}G$  ist der Tangentialraum von  $G$  im Punkt  $I$  (Einselement von  $G$ ). Die Dimension der Lie-Algebra entspricht der Dimension der Lie-Gruppe.

5. Durch die Exponentialabbildung  $C \mapsto \exp(C)$  wird eine Nullumgebung der Lie-Algebra  $\mathcal{L}G$   $C^\infty$ -diffeomorph auf eine Umgebung der Eins der Lie-Gruppe  $G$  abgebildet.

**Satz 3.4.3** (Ohne Beweis:) Für die klassischen Lie-Gruppen gilt:



1. Stimmen zwei Lie-Gruppen in einer gewissen Umgebung des Einselementes überein, dann besitzen sie die gleichen Lie-Algebren.

Beispiel:  $\text{SO}(3)$  und  $\text{O}(3)$ .

2. Ist die Lie-Gruppe  $G$  zusammenhängend, dann erhält man  $G$  aus der Lie-Algebra  $\mathcal{L}G$  durch die Bildung aller endlichen Produkte der Form

$$\exp(C_1) \exp(C_2) \dots \exp(C_k), \quad C_1, C_2, \dots, C_k \in \mathcal{L}G.$$

Im Spezialfall  $G = \text{SO}(n), \text{U}(n), \text{SU}(n)$  kann man  $k = 1$  wählen.

3. Ist  $G$  nicht zusammenhängend, dann ergibt die Konstruktion aus 2. die Zusammenhangskomponente des Einselementes von  $G$ .

Die Gleichheit der Lie-Algebren bedeutet somit Gleichheit der Zusammenhangskomponenten des Einselementes der entsprechenden Lie-Gruppen.

# Kapitel 4

## Die Gruppen $\mathrm{SO}(3)$ und $\mathrm{SU}(2)$

### 4.1 Beispiel: Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$

Um den engen Zusammenhang zwischen einer Lie-Gruppe und ihrer Lie-Algebra zu verstehen, diskutieren wir als Beispiel die Gruppe  $\mathrm{SO}(3)$ :

$$\mathrm{SO}(3) := \{A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \mid A^T A = AA^T = \mathbb{1}_{3 \times 3}, \det(A) = 1\}.$$

Wir betrachten ein kartesisches Koordinatensystem im  $\mathbb{R}^3$  mit einer Orthonormalbasis  $\{e_1, e_2, e_3\}$  und interpretieren die Elemente von  $\mathrm{SO}(3)$  als Transformationen  $x' = Ax$  des  $\mathbb{R}^3$ . Wir untersuchen Drehungen  $R_j(\varphi)$  um die  $e_j$ -Achse mit Drehwinkeln  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} R_1(\varphi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \\ R_2(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \\ R_3(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entwickle für kleine  $\varphi$  (Linearisierung):

$$\begin{aligned} R_j(\varphi) &= \mathbb{1}_{3 \times 3} + \varphi \mathcal{T}_j + \mathcal{O}(\varphi^2), \\ \mathcal{T}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{T}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{T}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die  $\mathcal{T}_j$  bilden eine Basis der reellen Lie-Algebra  $\mathfrak{so}(3)$  der Lie-Gruppe  $\mathrm{SO}(3)$ :

$$\mathfrak{so}(3) = \{\phi_j \mathcal{T}_j \mid \phi_j \in \mathbb{R}\}.$$

Wir definieren  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  als Menge aller  $(n, n)$ -Matrizen mit Werten in  $\mathbb{K}$ . Dann ist  $\mathfrak{so}(3)$  gleich der Menge aller reellen, schiefsymmetrischen  $(3, 3)$ -Matrizen:

$$\mathfrak{so}(3) = \{B \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) \mid B^T = -B\}.$$

Wegen

$$\exp(B) = \mathbb{1}_{3 \times 3} + B + \mathcal{R}(B)$$

mit

$$\frac{\mathcal{R}(B)}{\|B\|} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \|B\| \rightarrow 0$$

wird  $B \in \mathfrak{so}(3)$  auch als **infinitesimale Drehung** bezeichnet.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(B) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \\ \frac{\|\mathcal{R}(B)\|}{\|B\|} &= \frac{\|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{B^k}{k!}\|}{\|B\|} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\|B\|^{k-1}}{k!} = \|B\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|B\|^k}{(k+2)!} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \|B\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d. h.

$$[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2] = \mathcal{T}_3 \quad \text{und zyklisch.}$$

In der Physik benutzt man  $X_j = i\mathcal{T}_j$ , so dass

$$[X_i, X_j] = iC_{ijk}X_k \quad \text{mit} \quad C_{ijk} = \epsilon_{ijk}.$$

- $C_{ijk}$ : Strukturkonstanten der Lie-Algebra  $\mathfrak{so}(3)$  (abhängig von der Wahl der Basis).

Alle Drehungen  $A \in \mathrm{SO}(3)$  erhält man durch (siehe Satz 3.4.3, Unterpunkt 2.)

$$A = \exp(B) \text{ mit } B \in \mathfrak{so}(3), \text{ d. h. } B = \sum_{j=1}^3 \phi_j \mathcal{T}_j = -i \sum_{j=1}^3 \phi_j X_j, \phi_j \in \mathbb{R}.$$

Diese Abbildung ist surjektiv, z. B.  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ ,  $2\pi$ -periodisch in  $\phi_3$ .

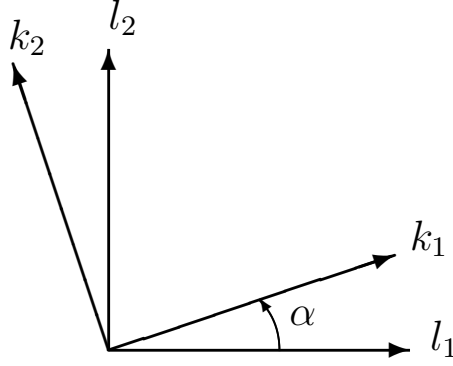


Abbildung 4.1:

- Geometrische Herleitung der Vertauschungsrelationen

Betrachte die Konjugation (siehe 1.3.14, 3.)

$$S(\theta)R_{\hat{n}}(\varphi)S^{-1}(\theta) = R_{\hat{n}'}(\varphi)$$

mit infinitesimalem  $\varphi$ . Konjugation entspricht Drehung um  $\hat{n}'$ -Achse mit demselben Drehwinkel, wobei  $\hat{n}' = S(\theta)\hat{n}$ .

Sei  $\hat{n} = \hat{e}_1$  und  $S(\theta)$  Drehung um  $x_3$ -Achse,  $S_3(\theta) = \exp(-i\theta X_3)$  (siehe Abbildung 4.1). Für die gedrehte Achse gilt:

$$\hat{n}' = \cos(\theta)\hat{e}_1 + \sin(\theta)\hat{e}_2 \Rightarrow \hat{n}' \cdot \vec{X} = \cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_2$$

und damit

$$e^{-i\theta X_3}[\mathbb{1}_{3 \times 3} - i\varphi X_1 + \mathcal{O}(\varphi^2)]e^{i\theta X_3} = \mathbb{1}_{3 \times 3} - i\varphi[\cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_2] + \mathcal{O}(\varphi^2)$$

oder durch Vergleich der in  $\varphi$  linearen Terme

$$e^{-i\theta X_3}X_1e^{i\theta X_3} = \cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_2.$$

Bilde  $d/d\theta$  für  $\theta = 0$ :

$$-i[X_3, X_1] = \left(-ie^{-i\theta X_3}[X_3, X_1]e^{i\theta X_3}\right)_{\theta=0} = (-\sin(\theta)X_1 + \cos(\theta)X_2)_{\theta=0} = X_2.$$

Die anderen Vertauschungsrelationen erhält man analog mit

1.  $\hat{n} = \hat{e}_2$  und  $S = S_3(\theta)$ ;
2.  $\hat{n} = \hat{e}_1$  und  $S = S_2(\theta) = \exp(-i\theta X_2)$ .

## 4.2 Irreduzible Darstellungen, Charaktere und Clebsch-Gordan-Zerlegung

### 4.2.1 Irreduzible Darstellungen

Nach Abschnitt 3.4 ergeben sich endliche Drehungen mit Hilfe der Exponentialfunktion. Deshalb wird das Auffinden irreduzibler Darstellungen der Gruppe  $SO(3)$  auf das Auffinden irreduzibler Darstellungen der Algebra zurückgeführt. Beachte:  $A$  blockdiagonal  $\Rightarrow A^n$  blockdiagonal für  $n \geq 0 \Rightarrow \exp(A)$  blockdiagonal.

Gesucht: Irreduzible Matrizen, die die Drehimpulsalgebra

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$$

erfüllen.

Lösung: Standardproblem aus der QM

$$\begin{aligned}\Psi_{m'm}^{(j)}(J_3) = \langle j, m' | J_3 | j, m \rangle &= m\delta_{m'm}, \\ \langle j, m' | J_+ | j, m \rangle &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\delta_{m',m+1}, \\ \langle j, m' | J_- | j, m \rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\delta_{m',m-1},\end{aligned}$$

mit  $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$ . Für ein gegebenes  $j$  gilt  $m = -j, -j+1, \dots, j$ , d. h. Darstellung durch  $[(2j+1), (2j+1)]$ -Matrizen.

- $2j+1$ : Multiplizität oder Dimensionalität der Darstellung.
- $j=0$ : Triviale (nichttreue) Darstellung von  $SO(3)$  und  $SU(2)$ .
- $j=1, 2, \dots$ : Treue Darstellungen von  $SO(3)$ , nichttreue Darstellungen von  $SU(2)$ .
- $j=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ : Treue Darstellungen von  $SU(2)$ .

- \* Algebraische Ableitung der Drehimpulseigenwerte (siehe z. B. G. Grawert, *Quantenmechanik*, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden 1977, Kapitel 9.1, H. F. Jones, *Groups, Representations and Physics*, Adam Hilger, Bristol 1990, Anhang B)

Gegeben sei ein Hilbert-Raum mit drei hermiteschen Operatoren  $J_i$ , die die Vertauschungsrelationen

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \tag{4.1}$$

erfüllen. Mit den Definitionen

$$\vec{J}^2 := J_i J_i, \quad J_{\pm} := J_1 \pm iJ_2$$

ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} [\vec{J}^2, J_j] &= [J_i J_i, J_j] = J_i [J_i, J_j] + [J_i, J_j] J_i = J_i i \epsilon_{ijk} J_k + i \epsilon_{ijk} J_k J_i \\ &= i \epsilon_{ijk} J_i J_k - i \epsilon_{ijk} J_i J_k = 0, \Rightarrow [\vec{J}^2, J_\pm] = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$[J_3, J_\pm] = [J_3, J_1 \pm i J_2] = i J_2 \pm J_1 = \pm J_\pm, \quad (4.3)$$

$$[J_+, J_-] = [J_1 + i J_2, J_1 - i J_2] = 2J_3, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 &= \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2 = J_+ J_- - \frac{1}{2}[J_+, J_-] + J_3^2 \\ &= J_+ J_- - J_3 + J_3^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$= J_- J_+ - \frac{1}{2}[J_-, J_+] + J_3^2 = J_- J_+ + J_3 + J_3^2. \quad (4.6)$$

- 1. Schritt: Da vertauschbare Operatoren denselben Satz von Eigenzuständen besitzen, wollen wir  $J_3$  und  $\vec{J}^2$  simultan diagonalisieren. Wir bezeichnen die entsprechenden Eigenzustände zunächst mit  $|\lambda, \mu\rangle$ :

$$J_3 |\lambda, \mu\rangle = \mu |\lambda, \mu\rangle, \quad (4.7)$$

$$\vec{J}^2 |\lambda, \mu\rangle = \lambda |\lambda, \mu\rangle, \quad (4.8)$$

mit reellen  $\mu$  und  $\lambda$ , da  $\vec{J}^2$  und  $J_3$  hermitesch sind.

**Satz 1:** Seien  $A$  und  $B$  lineare Operatoren mit  $A|a\rangle = a|a\rangle$  und  $[A, B] = \alpha B$ . Dann gilt:  $B|a\rangle$  ist Eigenzustand zu  $A$  mit Eigenwert  $a + \alpha$ , falls  $B|a\rangle \neq 0$ . Denn:

$$\begin{aligned} A(B|a\rangle) &= (AB)|a\rangle = (BA + [A, B])|a\rangle = BA|a\rangle + \alpha B|a\rangle \\ &= (a + \alpha)(B|a\rangle). \end{aligned}$$

- 2. Schritt: Konstruktion weiterer Zustände durch Anwendung von Satz 1 mit Hilfe von Gl. (4.2) und (4.3) liefert:

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 (J_\pm |\lambda, \mu\rangle) &= \lambda (J_\pm |\lambda, \mu\rangle), \\ J_3 (J_\pm |\lambda, \mu\rangle) &= (\mu \pm 1) (J_\pm |\lambda, \mu\rangle), \end{aligned}$$

falls  $J_\pm |\lambda, \mu\rangle \neq 0$ .  $J_\pm$  ist Auf- bzw. Absteigeoperator für  $J_3$ . Die Eigenwerte von  $J_3$  sind in Abständen von 1 angeordnet.

**Satz 2:** Sei  $A$  ein hermitescher Operator. Dann gilt  $\langle \psi | A^2 | \psi \rangle \geq 0$  für einen beliebigen normierten Zustand. Denn: Entwickle einen allgemeinen Zustand nach Eigenzuständen eines vollständigen Satzes vertauschbarer hermitescher Operatoren, von denen  $A$  einer sei:

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha, \beta} C_{\alpha\beta} |\alpha, \beta\rangle \quad \text{mit} \quad A|\alpha, \beta\rangle = \lambda_\alpha |\alpha, \beta\rangle, \quad \lambda_\alpha \in \mathbb{R},$$

wobei  $\beta$  kollektiv für die restlichen zur vollständigen Bezeichnung notwendigen Eigenwerte steht.

$$\langle \psi | A^2 | \psi \rangle = \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\alpha', \beta'} C_{\alpha\beta}^* C_{\alpha'\beta'} \underbrace{\langle \alpha, \beta | A^2 | \alpha', \beta' \rangle}_{\lambda_{\alpha'}^2 \langle \alpha, \beta | \alpha', \beta' \rangle} = \sum_{\alpha, \beta} |C_{\alpha\beta}|^2 \lambda_\alpha^2 \geq 0.$$

- 3. Schritt: Zusammenhang zwischen  $\lambda$  und einem maximalen Eigenwert  $j$  von  $J_3$ . Gegeben sei ein Eigenzustand  $|\lambda, \mu\rangle$  zu  $\vec{J}^2$  und  $J_3$ . Mit Hilfe von Satz 2 gilt

$$0 \leq \lambda = \langle \lambda, \mu | \vec{J}^2 | \lambda, \mu \rangle = \langle \lambda, \mu | J_1^2 + J_2^2 + \mu^2 | \lambda, \mu \rangle \geq \mu^2.$$

Wenden wir nun  $J_+$  auf  $|\lambda, \mu\rangle$  an und normieren das Resultat, finden wir analog

$$\lambda \geq (\mu + 1)^2$$

oder nach  $n$ -maliger Wiederholung

$$\lambda \geq (\mu + n)^2,$$

was für genügend großes  $n$  auf einen Widerspruch führt. Deshalb nehmen wir an, dass für ein  $\mu_{max} =: j$

$$J_+ |\lambda, j\rangle = 0$$

gilt. Mit Hilfe von Gl. (4.6) finden wir für diesen Zustand

$$\lambda |\lambda, j\rangle = \vec{J}^2 |\lambda, j\rangle = [J_- J_+ + J_3(J_3 + 1)] |\lambda, j\rangle = j(j + 1) |\lambda, j\rangle,$$

d. h.  $\lambda = j(j + 1)$ . Für die Eigenvektoren schreiben wir im Folgenden  $|j, m\rangle$ , benutzen also insbesondere die Quantenzahl  $j$  statt des Eigenwertes  $j(j + 1)$  zur Charakterisierung.

- 4. Schritt: Existenz eines minimalen Eigenwertes  $-j$  zu  $J_3$ . Gegeben sei  $|j, j\rangle$ . Wende nun  $J_-$  an, normiere das Resultat und gehe wie oben vor:  $\Rightarrow j(j + 1) \geq (j - 1)^2$  und nach  $n$ -maliger Anwendung  $j(j + 1) \geq (j - n)^2 = (n - j)^2$ , was für genügend großes  $n$  auf einen Widerspruch führt.  $\Rightarrow \exists \mu_{min}$  mit

$$J_- |j, \mu_{min}\rangle = 0.$$

Mit Hilfe von Gl. (4.5) gilt

$$\begin{aligned} j(j + 1) |j, \mu_{min}\rangle &= \vec{J}^2 |j, \mu_{min}\rangle = [J_+ J_- + J_3(J_3 - 1)] |j, \mu_{min}\rangle \\ &= \mu_{min}(\mu_{min} - 1) |j, \mu_{min}\rangle \end{aligned}$$

mit den Lösungen  $\mu_{min} = -j$  und  $\mu_{min} = j + 1$ , wobei die zweite wegen  $\mu_{max} = j$  verworfen werden kann.

- 5. Schritt: Welche Werte für  $j$  sind möglich? Für ein gegebenes  $j$  reicht das Spektrum von  $J_3$  von  $-j$  bis  $j$  in ganzzahligen Schritten. Die Anzahl der Eigenwerte  $2j + 1$  entspricht der Multiplizität bzw. Dimensionalität der Darstellung, muss also eine positive natürliche Zahl sein.  $\Rightarrow$

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

- 6. Schritt: Festlegung der relativen Phasen der Zustände eines Multipletts. Betrachte die Norm

$$\|J_{\pm}|j, m\rangle\|^2 = \langle j, m|J_{\pm}^{\dagger}J_{\pm}|j, m\rangle = \langle j, m|J_{\mp}J_{\pm}|j, m\rangle.$$

Benutze Gl. (4.5) und (4.6)

$$J_{\mp}J_{\pm} = \vec{J}^2 - J_3^2 \mp J_3 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\|J_{\pm}|j, m\rangle\|^2 &= \langle j, m|(\vec{J}^2 - J_3^2 \mp J_3)|j, m\rangle = j(j+1) - m(m \pm 1) \\ &= (j \mp m)(j \pm m + 1).\end{aligned}$$

Wir benutzen die Phasenkonvention

$$\begin{aligned}J_{\pm}|j, m\rangle &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle \\ &= \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j, m \pm 1\rangle.\end{aligned}$$

## 4.2.2 Charaktere

Betrachte eine  $(2j+1)$ -dimensionale Darstellung von  $J_3$ :

$$\Psi^{(j)}(J_3) = \text{diag}(j, j-1, \dots, -j+1, -j).$$

Sei  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_n)$ .  $\Rightarrow A^k = \text{diag}(A_1^k, \dots, A_n^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (Beweis durch Induktion). Damit gilt

$$D_3^{(j)}(\varphi) = \exp[-i\varphi\Psi^{(j)}(J_3)] = \text{diag}(e^{-ij\varphi}, e^{-i(j-1)\varphi}, \dots, e^{i(j-1)\varphi}, e^{ij\varphi}).$$

Berechne den Charakter:

$$\chi^{(j)}(\varphi) = \text{Tr}[D_3^{(j)}(\varphi)] = e^{-ij\varphi} + \dots + e^{ij\varphi} = e^{-ij\varphi}(1 + e^{i\varphi} + \dots + e^{i2j\varphi}).$$

Setze

$$x := e^{i\varphi}$$

und verwende die endliche geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

mit  $n = 2j + 1$ :

$$\chi^{(j)}(\varphi) = \frac{\underbrace{e^{-ij\varphi}}_{\frac{e^{-i(j+\frac{1}{2})\varphi}}{e^{-i\frac{1}{2}\varphi}}}}{e^{i\varphi} - 1} \frac{e^{i(2j+1)\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1} = \frac{e^{i(j+\frac{1}{2})\varphi} - e^{-i(j+\frac{1}{2})\varphi}}{e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi}{2}}} = \frac{\sin[(j+\frac{1}{2})\varphi]}{\sin(\frac{1}{2}\varphi)}.$$

(4.9)



Da Drehungen um verschiedene Achsen mit demselben Drehwinkel konjugiert sind (siehe Übung 5, Aufgabe 3.) und  $\text{Tr}(BAB^{-1}) = \text{Tr}(A)$ , gilt Gl. (4.9) für jede Drehung mit Drehwinkel  $\varphi$ .

Als Anwendung von 3.2.4 betrachten wir die Orthogonalität von Charakteren. Wir benötigen die Verallgemeinerung von

$$\frac{1}{|G|} \sum_g \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{|G|} \sum_i k_i.$$

Ohne Beweis (siehe H. F. Jones, *Groups, Representations and Physics*, Anhang C): Charakterisiere  $R(g)$  durch Drehwinkel  $\varphi$  und Winkel  $\phi$  und  $\theta$  für Drehachse (dies ist nicht die Parametrisierung durch Euler-Winkel!). Dann gilt

$$\frac{1}{|G|} \sum_g \rightarrow \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \, 2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \int_{-1}^1 d(\cos(\theta)) \int_0^{2\pi} d\phi$$

und

$$\frac{1}{|G|} \sum_i k_i \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \, \underbrace{2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right)}_{1 - \cos(\varphi)},$$

wobei wir über Konjugationsklassen summieren bzw. integrieren:

$$\langle \chi^{(i)}, \chi^{(j)} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \, 2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \frac{\sin[(i + \frac{1}{2})\varphi] \sin[(j + \frac{1}{2})\varphi]}{\sin^2(\frac{1}{2}\varphi)}.$$

Verwende das Additionstheorem  $2 \sin(a) \sin(b) = \cos(a - b) - \cos(a + b)$ :

$$\dots = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \{ \cos[(i - j)\varphi] - \underbrace{\cos[(i + j + 1)\varphi]}_{\geq 1} \} = \delta_{ij}.$$

### 4.2.3 Clebsch-Gordan-Zerlegung

**Satz 4.2.1** Für das innere Tensorprodukt zweier irreduzibler Darstellungen von  $\text{SO}(3)$  (bzw.  $\text{SU}(2)$ ) gilt die Clebsch-Gordan-Zerlegung:

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} D^{(j)}.$$

Beweis (analog zu Übung 10, Aufgabe 3.): O. B. d. A. sei  $j_1 \geq j_2$ .

$$\begin{aligned} \chi^{(j_1)}(\varphi) \chi^{(j_2)}(\varphi) &= \frac{e^{i(j_1+\frac{1}{2})\varphi} - e^{-i(j_1+\frac{1}{2})\varphi}}{2i \sin(\frac{1}{2}\varphi)} \sum_{m=-j_2}^{j_2} e^{im\varphi} \\ &= \frac{1}{2i \sin(\frac{1}{2}\varphi)} \sum_{m=-j_2}^{j_2} \left( e^{i(j_1+m+\frac{1}{2})\varphi} - e^{-i(j_1-m+\frac{1}{2})\varphi} \right). \end{aligned}$$

Wende

$$\sum_{m=-j_2}^{j_2} f(m) = \sum_{m=-j_2}^{j_2} f(-m)$$

in der zweiten Summe an:

$$\dots = \frac{1}{2i \sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right)} \sum_{m=-j_2}^{j_2} \left( e^{i(j_1+m+\frac{1}{2})\varphi} - e^{-i(j_1+m+\frac{1}{2})\varphi} \right).$$

Umbenennung

$$j := j_1 + m \Rightarrow m = -j_2 \rightarrow j = j_1 - j_2, \quad m = j_2 \rightarrow j = j_1 + j_2$$

liefert

$$\dots = \frac{1}{2i \sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right)} \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} \left( e^{i(j+\frac{1}{2})\varphi} - e^{-i(j+\frac{1}{2})\varphi} \right) = \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} \chi^{(j)}(\varphi).$$

Anwenden von Satz 3.2.4, 4. + 3.  $\Rightarrow$  Behauptung.

### 4.3 Clebsch-Gordan-Koeffizienten und Wigner-Eckart-Theorem

Literatur:

- A. Lindner, *Drehimpulse in der Quantenmechanik*, Teubner, Stuttgart 1984
- A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton 1985

Betrachte die innere Tensorproduktarstellung

$$D^{(j_1 \times j_2)}(g) = D^{(j_1)}(g) \otimes D^{(j_2)}(g) = D^{(|j_1-j_2|)}(g) \oplus \dots \oplus D^{(j_1+j_2)}(g)$$

für  $g \in \text{SO}(3)$  bzw.  $\text{SU}(2)$ . Die Vektoren des direkten Produktraums sind von der Form

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} a_{m_1 m_2} \underbrace{|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle}_{\text{Physiknotation } |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle} = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^j b_{jm} |(j_1 j_2) j m\rangle.$$

- Ungekoppelte Basis  $\{|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\}$ : Eigenzustände zu  $\vec{J}^2(1)$ ,  $\vec{J}^2(2)$ ,  $J_3(1)$  und  $J_3(2)$  mit Eigenwerten  $j_1(j_1 + 1)$ ,  $j_2(j_2 + 1)$ ,  $m_1$  und  $m_2$ .

- Gekoppelte Basis  $\{|(j_1 j_2) j m\rangle\}$ : Eigenzustände zu  $\vec{J}^2(1)$ ,  $\vec{J}^2(2)$ ,  $\vec{J}^2$  und  $J_3$ , wobei  $\vec{J} = \vec{J}(1) + \vec{J}(2)$ , mit Eigenwerten  $j_1(j_1 + 1)$ ,  $j_2(j_2 + 1)$ ,  $j(j + 1)$  und  $m$ .

Bemerkung: Manche Bücher (z. B. Edmonds) schreiben  $|j_1 j_2 j m\rangle$  anstelle von  $|(j_1 j_2) j m\rangle$ .

Seien  $j_1$  und  $j_2$  aus  $\{0, \frac{1}{2}, 1, \dots\}$  fest vorgegeben. Die Anzahl orthogonaler Basisvektoren ist  $M = (2j_1 + 1) \cdot (2j_2 + 1)$  (siehe Übung 12, Aufgabe 7.) mit Orthogonalitätsrelationen

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 m'_1 j_2 m'_2 \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}, \quad (4.10)$$

$$\langle (j_1 j_2) j m | (j_1 j_2) j' m' \rangle = \delta_{j j'} \delta_{m m'}. \quad (4.11)$$

Betrachte nun den Basiswechsel

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \underbrace{\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^j}_{\text{kurz: } \sum_{j,m}} \underbrace{\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m_2 & | & m \end{pmatrix}}_{\text{Clebsch-Gordan-Koeffizient}} |(j_1 j_2) j m\rangle. \quad (4.12)$$

Symbolisch:  $e_i = a_{ji} f_j$ . Mit einer geeigneten Phasenkonvention sind alle CG-Koeffizienten reell. Eindeutige Festlegung mittels

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ j_1 & m_2 & | & j \end{pmatrix} \geq 0 \quad (4.13)$$

[Condon-Shortley (CS)].

Anmerkung: Im Folgenden werden wir bei den Summen die Grenzen unterdrücken und salopp  $\sum_{j,m}$  für  $\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^j$  usw. schreiben.

Benutze Gl. (4.12) zusammen mit (4.11) zur Bestimmung der CG-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \langle (j_1 j_2) j m | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle &= \sum_{j', m'} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j' \\ m_1 & m_2 & | & m' \end{pmatrix} \underbrace{\langle (j_1 j_2) j m | (j_1 j_2) j' m' \rangle}_{\delta_{j j'} \delta_{m m'}} \\ &= \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m_2 & | & m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Interpretiere

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m_2 & | & m \end{pmatrix}$$

als Eintrag  $C_{m_1 m_2; j m}$  einer orthogonalen  $(M, M)$ -Matrix mit Zeilenindex  $m_1 m_2$  und Spaltenindex  $j m$ . Aus  $C^T C = \mathbb{1}_{M \times M}$  für orthogonale Matrizen

(Basiswechsel zwischen zwei Orthonormalbasen) folgt

$$\begin{aligned}
\delta_{j'j}\delta_{m'm} &= \delta_{j'm';jm} \\
&= (C^T C)_{j'm';jm} \\
&= \sum_{m_1, m_2} C_{j'm';m_1 m_2}^T C_{m_1 m_2; jm} \\
&= \sum_{m_1, m_2} C_{m_1 m_2; j'm'} C_{m_1 m_2; jm} \\
&= \sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j' \\ m_1 & m_2 & | & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m_2 & | & m \end{pmatrix}. \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Analog folgt aus  $CC^T = \mathbb{1}_{M \times M}$

$$\begin{aligned}
\delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} &= \delta_{m_1 m_2; m'_1 m'_2} \\
&= (CC^T)_{m_1 m_2; m'_1 m'_2} \\
&= \sum_{j, m} C_{m_1 m_2; jm} C_{jm; m'_1 m'_2}^T \\
&= \sum_{j, m} C_{m_1 m_2; jm} C_{m'_1 m'_2; jm} \\
&= \sum_{j, m} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m_2 & | & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m'_1 & m'_2 & | & m \end{pmatrix}. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Gl. (4.14) kann Gl. (4.12) invertiert werden (siehe Übung 13, Aufgabe 2.):

$$|(j_1 j_2) jm\rangle = \sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m_2 & | & m \end{pmatrix} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle. \quad (4.16)$$

**Vorbemerkung 4.3.1** Wegen

$$\begin{aligned}
J_{\pm}|j, m\rangle &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle \\
&= \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j, m \pm 1\rangle
\end{aligned}$$

gilt

$$J_-|j, j\rangle = \sqrt{(j+j)(j-j+1)}|j, j-1\rangle = \sqrt{2j}|j, j-1\rangle.$$

**4.3.2 Algorithmus zur Konstruktion der Clebsch-Gordan-Koeffizienten.** Gegeben seien  $j_1, j_2$  und  $j$  mit  $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ . Im Folgenden verwenden wir die Kurzschreibweise

$$\begin{aligned}
|m_1; m_2\rangle &:= |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle, \\
|j, m\rangle &:= |(j_1 j_2) jm\rangle.
\end{aligned}$$

Beachte außerdem: Der Eigenwert zu  $J_3 = J_3(1) + J_3(2)$  ist additiv, d. h.  $m = m_1 + m_2$ .

1. Startpunkt: Sei  $j = j_1 + j_2$ .

•

$$|j, j\rangle = |j_1; j_2\rangle \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \end{array} \right) = 1 \stackrel{(4.13)}{\geq} 0.$$

• Anwenden des Absteigeoperators  $J_- = J_-(1) + J_-(2)$ :

$$J_-|j, j\rangle = \sqrt{2j}|j, j-1\rangle = \sqrt{2j_1}|j_1-1; j_2\rangle + \sqrt{2j_2}|j_1; j_2-1\rangle.$$

Projektion liefert Clebsch-Gordan-Koeffizienten:

$$\langle j_1-1; j_2 | * \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_1-1 & j_2 & j_1 + j_2 - 1 \end{array} \right) = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}},$$

$$\langle j_1; j_2-1 | * \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_1 & j_2-1 & j_1 + j_2 - 1 \end{array} \right) = \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}}.$$

•  $2(j_1 + j_2)$ -maliges Anwenden des Absteigeoperators erzeugt alle

$$\left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ m_1 & m_2 & m \end{array} \right).$$

2.  $j = j_1 + j_2 - 1$ .

• Bilde Linearkombination

$$|j, j\rangle = \alpha|j_1; j_2-1\rangle + \beta|j_1-1; j_2\rangle.$$

• Bestimmung von  $\alpha$  und  $\beta$ .

– Normierung:  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ .

– CS:  $\alpha \geq 0$ .

– Anwenden des Aufsteigeoperators  $J_+$ :

$$\begin{aligned} J_+|j, j\rangle = 0 &= \alpha \underbrace{\sqrt{[j_2 - (j_2 - 1)](j_2 + j_2 - 1 + 1)}}_{\sqrt{2j_2}} |j_1; j_2\rangle \\ &\quad + \beta \sqrt{2j_1} |j_1; j_2\rangle. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 = \sqrt{2j_2}\alpha + \sqrt{2j_1}\beta \Rightarrow \beta = -\sqrt{j_2/j_1}\alpha.$$

Einsetzen in Normierungsbedingung  $\alpha^2(1 + j_2/j_1) = 1$  liefert

$$\alpha = \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 - 1 \\ j_1 & j_2 - 1 & j_1 + j_2 - 1 \end{array} \right) = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}},$$

$$\beta = \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 - 1 \\ j_1 - 1 & j_2 & j_1 + j_2 - 1 \end{array} \right) = -\sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}}.$$

- $2(j_1 + j_2 - 1)$ -maliges Anwenden des Absteigeoperators erzeugt alle

$$\left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 - 1 \\ m_1 & m_2 & m \end{array} \right).$$

3.  $j = j_1 + j_2 - 2$ .

- Bilde Linearkombination

$$|j, j\rangle = \alpha|j_1; j_2 - 2\rangle + \beta|j_1 - 1; j_2 - 1\rangle + \gamma|j_1 - 2; j_2\rangle.$$

- Bestimmung von  $\alpha, \beta, \gamma$  (siehe Übung 13, Aufgabe 3.).
  - Normierung:  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ .
  - CS:  $\alpha \geq 0$ .
  - Anwenden des Aufsteigeoperators  $J_+$ .
- Usw.

4. Usw. bis  $j = |j_1 - j_2|$ .

**Beispiel 4.3.3**  $D^{(\frac{1}{2})} \otimes D^{(\frac{1}{2})} = D^{(0)} \oplus D^{(1)}$ .

1. Startpunkt  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ .

- 

$$|1, 1\rangle = \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle, \quad \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) = 1.$$

- Anwenden des Leiteroperators  $J_-$ :

$$\begin{aligned} J_-|1, 1\rangle &= \sqrt{2 \cdot 1}|1, 0\rangle \\ &= \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2}} \left| -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle, \end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right).$$

$$|1, -1\rangle = \left| -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{array} \right) = 1.$$

2.  $0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ . Siehe 4.3.2.2.

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \left| -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = - \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right).$$

D. h. die orthonormierten Basiszustände der Trägerräume lauten (ausführlich)

1.  $j = 1$ :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right), \\ & \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle; \end{aligned}$$

2.  $j = 0$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right).$$

**Beispiel 4.3.4**  $D^{(1)} \otimes D^{(\frac{1}{2})} = D^{(\frac{1}{2})} \oplus D^{(\frac{3}{2})}$ .

1. Startpunkt  $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ .

•

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \left| 1; \frac{1}{2} \right\rangle, \quad \left( \begin{array}{c|c} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{array} \middle| \frac{3}{2} \right) = 1.$$

• Anwenden des Leiteroperators  $J_-$ .

$$J_- \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{3} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{2} \left| 0; \frac{1}{2} \right\rangle + \left| 1; -\frac{1}{2} \right\rangle.$$

$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{array} \middle| \frac{3}{2} \right) = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \left( \begin{array}{c|c} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \middle| \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

• Usw. (Übung 13, Aufgabe 4.).

2.  $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ . Siehe Übung 13, Aufgabe 4.

**Anmerkungen 4.3.5** Einige Eigenschaften der CG-Koeffizienten.

• Auswahlregeln:

$$\left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{array} \right) = 0 \quad \text{für } m \neq m_1 + m_2, j > j_1 + j_2, j < |j_1 - j_2|.$$

• Phasenkonvention: Reell + Gl. (4.13)  $\Rightarrow$  eindeutig.

• Der Betrag eines CG-Koeffizienten ist immer kleiner oder gleich eins (Stichwort orthogonale Transformation).

- Rekursionsbeziehung (siehe Übung 13, Aufgabe 5.):

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(j \pm m)(j \mp m + 1)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m_2 & | & m \mp 1 \end{pmatrix} \\
= & \sqrt{(j_1 \mp m_1)(j_1 \pm m_1 + 1)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 \pm 1 & m_2 & | & m \end{pmatrix} \\
& + \sqrt{(j_2 \mp m_2)(j_2 \pm m_2 + 1)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m_2 \pm 1 & | & m \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

- Symmetrieeigenschaften (siehe Lindner, Kapitel 3.7):

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m_2 & | & m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & | & j \\ -m_2 & -m_1 & | & -m \end{pmatrix} \\
&= (-)^{j_1+j_2-j} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & | & j \\ m_2 & m_1 & | & m \end{pmatrix} \\
&= (-)^{j_1+j_2-j} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ -m_1 & -m_2 & | & -m \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

#### 4.3.6 Verfahren zur Konstruktion irreduzibler Darstellungen höherer Dimensionalität.

$$\begin{aligned}
D_{mm'}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \langle jm | \exp(-i\alpha J_3) \exp(-i\beta J_2) \exp(-i\gamma J_3) |jm'\rangle^* \\
&= \exp(im\alpha) d_{m,m'}^{(j)}(\beta) \exp(im'\gamma).
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die komplexe Konjugation  $\langle \dots \rangle^*$  ist eine Frage der Konvention. Wegen 2.2.11 ist mit  $D$  auch  $D^*$  eine Darstellung.

Seien  $j_1, j_2$  und  $j$  fest mit  $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ . Wir drücken  $\langle jm |$  und  $|jm'\rangle$  mit Hilfe von Gl. (4.16) aus und benutzen die Auswahlregel für die Projektionen:

$$\begin{aligned}
D_{mm'}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \exp(im\alpha) \exp(im'\gamma) \sum_{m_1, m'_1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m - m_1 & | & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m'_1 & m' - m'_1 & | & m' \end{pmatrix} \\
&\quad \times \langle j_1 m_1 j_2 m - m_1 | \underbrace{\exp[-i\beta(J_2(1) + J_2(2))]}_{\exp(-i\beta J_2) \otimes \exp(-i\beta J_2)} |j_1 m'_1 j_2 m' - m'_1\rangle^* \\
&= \exp(im\alpha) \exp(im'\gamma) \sum_{m_1, m'_1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m - m_1 & | & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m'_1 & m' - m'_1 & | & m' \end{pmatrix} \\
&\quad \times d_{m_1, m'_1}^{(j_1)}(\beta) d_{m - m_1, m' - m'_1}^{(j_2)}(\beta).
\end{aligned}$$

**Folgerung 4.3.7** Von  $d^{(\frac{1}{2})}$  ausgehend können wir alle  $d^{(j)}$  sukzessive konstruieren.



**Vorbereitung 4.3.8** Es gilt

$$\begin{pmatrix} d_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})}(\beta) & d_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})}(\beta) \\ d_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})}(\beta) & d_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})}(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Begründung: Beachte

$$d_{m,m'}^{(\frac{1}{2})}(\beta) = [\chi_m^\dagger \exp\left(-i\beta\frac{\sigma_2}{2}\right) \chi_{m'}]^*,$$

mit den Pauli-Spinoren

$$\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verwende

$$\exp\left(-i\beta\frac{\sigma_2}{2}\right) = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \mathbb{1}_{2 \times 2} \underbrace{-i\sigma_2}_{-i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Beachte, dass die Matrix reell ist. Deshalb spielt die Komplexkonjugation keine Rolle.

**Beispiel 4.3.9**

$$d_{1,1}^{(1)}(\beta) = \frac{1}{2}[1 + \cos(\beta)].$$

Begründung:

$$\begin{aligned} & d_{1,1}^{(1)}(\beta) \\ &= \sum_{m_1, m'_1} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & 1 \\ m_1 & 1 - m_1 & | & 1 \end{pmatrix}}_{\delta_{m_1 \frac{1}{2}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & 1 \\ m'_1 & 1 - m'_1 & | & 1 \end{pmatrix}}_{\delta_{m'_1 \frac{1}{2}}} d_{m_1, m'_1}^{(\frac{1}{2})}(\beta) d_{1-m_1, 1-m'_1}^{(\frac{1}{2})}(\beta) \\ &= d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})}(\beta) d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})}(\beta) \\ &= \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}[1 + \cos(\beta)]. \end{aligned}$$

**Folgerung 4.3.10** Die Matrizen  $D^{(j)}$  ( $j \geq 1$ ) jeder irreduziblen Darstellung von  $\text{SO}(3)$  und  $\text{SU}(2)$  lassen sich mittels der Clebsch-Gordan-Koeffizienten aus 4.3.2 und des Algorithmus aus 4.3.6 sukzessive aus  $D^{(1/2)}$  konstruieren.

**Folgerung 4.3.11**

$$d_{m,m'}^{(j)}(\beta) = d_{m,m'}^{(j)*}(\beta).$$

Begründung: Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind reell und ebenso die  $d_{m,m'}^{(\frac{1}{2})}(\beta)$ . Wende nun 4.3.10 an.

**Vorbemerkung 4.3.12** Gegeben sei ein quantenmechanisches System mit Hamilton-Operator  $H_0$ , der invariant bzgl. einer Symmetriegruppe  $G$  ist.

Beispiel Drehungen:

$$[H_0, U(R)] = 0 \quad \text{oder} \quad [H_0, J_i] = 0, \quad U(R) = \exp(-i\alpha_i J_i),$$

wobei  $U(R)$  eine unitäre Darstellung der Symmetriegruppe auf dem Hilbert-Raum des Systems ist. Organisiere Eigenzustände von  $H_0$  bzgl. des Drehverhaltens als Basisvektoren (von Trägerräumen) irreduzibler Darstellungen (Eigenzustände zu  $\vec{J}^2$  und  $J_3$ ). Gesucht ist eine effiziente Berechnung von Matrixelementen

$$\langle \psi | A | \phi \rangle,$$

wenn das Transformationsverhalten  $A \mapsto A' = UAU^\dagger$  bekannt ist.

**Beispiel 4.3.13** Sei  $S$  ein **skalarer Operator**, d. h.

$$U(R)SU^\dagger(R) = S \Leftrightarrow [J_i, S] = 0.$$

Dann gilt

$$\langle j'm' | S | jm \rangle = S_j \delta_{j'j} \delta_{m'm}.$$

Beweis:

1.  $\delta_{j'j}$ :

$$[J_i, S] = 0 \Rightarrow [\vec{J}^2, S] = 0. \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} j(j+1)\langle j'm' | S | jm \rangle &= \langle j'm' | S \vec{J}^2 | jm \rangle \\ &= \langle j'm' | \vec{J}^2 S | jm \rangle \\ &= j'(j'+1)\langle j'm' | S | jm \rangle. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underbrace{[j(j+1) - j'(j'+1)]}_{(j-j')(j+j'+1)} \langle j'm' | S | jm \rangle = 0.$$

Aus  $j + j' + 1 \geq 1$  folgt  $\langle j'm' | S | jm \rangle = 0$  für  $j \neq j'$ .

2.  $\delta_{m'm}$ :

$$[J_3, S] = 0. \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} m\langle j'm' | S | jm \rangle &= \langle j'm' | S J_3 | jm \rangle \\ &= \langle j'm' | J_3 S | jm \rangle \\ &= m' \langle j'm' | S | jm \rangle. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle j'm' | S | jm \rangle = 0$  für  $m \neq m'$ .

3.  $S_j$  unabhängig von  $m$  folgt aus  $[S, J_{\pm}] = 0$ :

$$\begin{aligned}\sqrt{(j-m+1)(j+m)}\langle jm|S|jm\rangle &= \langle jm|SJ_+|jm-1\rangle \\ &= \langle jm|J_+S|jm-1\rangle.\end{aligned}$$

Verwende

$$\begin{aligned}\langle jm|J_+ &= \langle jm|(J_1 + iJ_2) \\ &= \left[ (J_1^\dagger - iJ_2^\dagger)|jm\rangle \right]^\dagger \\ &= \left[ (J_1 - iJ_2)|jm\rangle \right]^\dagger \\ &= (J_-|jm\rangle)^\dagger \\ &= \left( \sqrt{(j+m)(j-m+1)}|jm-1\rangle \right)^\dagger \\ &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\langle jm-1|.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\dots = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\langle jm-1|S|jm-1\rangle.$$

Auswerten für  $m = j, \dots, -j+1$  liefert

$$\langle jj|S|jj\rangle = \langle jj-1|S|jj-1\rangle = \dots = \langle j-j|S|j-j\rangle.$$

**Definition 4.3.14** Gelten für die  $2n+1$  Operatoren  $A_\nu^{(n)}$ ,  $\nu = n, n-1, \dots, -n$  die Transformationseigenschaften

$$\begin{aligned}U(R)A_\nu^{(n)}U^\dagger(R) &= \exp(-i\alpha_i J_i)A_\nu^{(n)}\exp(i\alpha_i J_i) \\ &= \sum_{\mu=-n}^n D_{\mu\nu}^{(n)*}(R)A_\mu^{(n)} \\ &= \sum_{\mu} \langle n\mu | \exp(-i\alpha_i J_i) | n\nu \rangle A_\mu^{(n)},\end{aligned}$$

so bilden sie die Komponenten eines irreduziblen (sphärischen) Tensoroperators  $n$ -ter Stufe  $A^{(n)}$ .

- „Irreduzibel“: Drehimpulsoperatoren verknüpfen nur Tensoroperatoren gleicher Stufe.
- Tensoren halbzahlicher Stufe sind die Fermionenfeldoperatoren, welche die Erzeugung bzw. Vernichtung von Fermionen beschreiben.

**Anmerkung 4.3.15** Bisweilen findet man auch die Linearisierung von 4.3.14 als Definition eines irreduziblen Tensoroperators  $n$ -ter Stufe:

$$\begin{aligned}[J_3, A_\nu^{(n)}] &= \nu A_\nu^{(n)}, \\ [J_{\pm}, A_\nu^{(n)}] &= \sqrt{n(n+1) - \nu(\nu \pm 1)} A_{\nu \pm 1}^{(n)}.\end{aligned}$$

Denn: Bilde

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \cdots \Big|_{\vec{\alpha}=0} = -i[J_i, A_\nu^{(n)}] = -i \sum_\mu \langle n\mu | J_i | n\nu \rangle A_\mu^{(n)}.$$

Betrachte  $J_3$  und  $J_\pm$ :

$$[J_3, A_\nu^{(n)}] = \sum_\mu \underbrace{\langle n\mu | J_3 | n\nu \rangle}_{\nu \delta_{\mu\nu}} A_\mu^{(n)} = \nu A_\nu^{(n)}.$$

$$[J_\pm, A_\nu^{(n)}] = \sum_\mu \frac{\langle n\mu | J_\pm | n\nu \rangle}{\sqrt{(n \mp \nu)(n \pm \nu + 1)} \delta_{\mu, \nu \pm 1}} A_\mu^{(n)} = \frac{\sqrt{(n \mp \nu)(n \pm \nu + 1)}}{\sqrt{n(n+1) - \nu(\nu \pm 1)}} A_{\nu \pm 1}^{(n)}.$$

**Beispiel 4.3.16** Sei  $H_0$  ein rotationsinvarianter Einteilchen-Hamilton-Operator (ohne Spin). Ersetze  $J_i$  durch  $l_i$ .

1. Sphärische Tensoren nullter Stufe:  $H_0, \vec{l}^2, \vec{p}^2$ , usw.
2. Es seien  $A_1, A_2$  und  $A_3$  die kartesischen Komponenten eines „Vektoroperators“, d. h.

$$[l_i, A_j] = i\epsilon_{ijk} A_k.$$

Die sphärischen Komponenten lauten dann

$$A_0^{(1)} = A_3, \quad A_{\pm 1}^{(1)} = \frac{\mp 1}{\sqrt{2}}(A_1 \pm iA_2).$$

Sphärische Tensoren erster Stufe:  $r^{(1)}, p^{(1)}$  und  $l^{(1)}$  mit Komponenten  $r_\alpha^{(1)}, p_\alpha^{(1)}$  und  $l_\alpha^{(1)}$ .

Konvention: Lateinische/griechische Indizes für kartesische/sphärische Komponenten.

$$[l_i, r_j] = \epsilon_{ikl} [r_k p_l, r_j] = \epsilon_{ikl} (r_k \underbrace{[p_l, r_j]}_{-i\delta_{lj}} + \underbrace{[r_k, r_j] p_l}_0) = -i\epsilon_{ikj} r_k = i\epsilon_{ijk} r_k.$$

Analog für den Impulsoperator (Drehimpulsoperator klar).

Exemplarisch:

$$[l_\pm, r_{\pm 1}^{(1)}] = -\frac{1}{\sqrt{2}} [l_1 \pm il_2, r_1 + ir_2] = -\frac{1}{\sqrt{2}} (-r_3 \pm r_3) = \begin{cases} 0, \\ \sqrt{2} r_3 = \sqrt{2} r_0^{(1)}. \end{cases}$$

Beachte die Analogie zu den Kugelfunktionen:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) &= r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{11}(\Theta, \Phi), \\ z &= r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\Theta, \Phi), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy) &= r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1-1}(\Theta, \Phi). \end{aligned}$$

**Satz 4.3.17 Wigner-Eckart-Theorem.** Für die Matrixelemente eines irreduziblen Tensoroperators  $n$ -ter Stufe gilt

$$\langle j'm'|A_\nu^{(n)}|jm\rangle = \begin{pmatrix} j & n & j' \\ m & \nu & m' \end{pmatrix} \frac{\langle j'||A^{(n)}||j\rangle}{\underbrace{\sqrt{2j'+1}}_{\text{Konventionsfrage}}},$$

wobei  $\langle j'||A^{(n)}||j\rangle$  als **reduziertes Matrixelement** bezeichnet wird. Die Abhängigkeit von den Richtungsquantenzahlen wird vollständig durch einen Clebsch-Gordan-Koeffizienten beschrieben. Das WE-Theorem impliziert

$$\langle j'm'|A_\nu^{(n)}|jm\rangle = 0 \quad \text{für } j' > j+n, j' < |j-n|, m+\nu \neq m',$$

d. h.  $A_\nu^{(n)}$  ändert die Projektion um  $\nu$  und überträgt den Drehimpuls  $n$  auf das System.

Beweis: Betrachte die  $(2n+1) \cdot (2j+1)$  Zustände  $A_\nu^{(n)}|jm\rangle$ . Diese transformieren sich bzgl. Drehungen wie  $|n\nu jm\rangle$ , denn

$$\begin{aligned} J_3 A_\nu^{(n)}|jm\rangle &= ([J_3, A_\nu^{(n)}] + A_\nu^{(n)} J_3)|jm\rangle = (\nu+m)A_\nu^{(n)}|jm\rangle, \\ J_\pm A_\nu^{(n)}|jm\rangle &= ([J_\pm, A_\nu^{(n)}] + A_\nu^{(n)} J_\pm)|jm\rangle \\ &= \sqrt{n(n+1) - \nu(\nu \pm 1)} A_{\nu \pm 1}^{(n)}|jm\rangle \\ &\quad + \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} A_\nu^{(n)}|jm \pm 1\rangle. \end{aligned}$$

Wir bilden mittels CG-Koeffizienten Zustände, die sich bei Drehungen nach einer irreduziblen Darstellung transformieren. Sei  $|n-j| \leq j'' \leq n+j$ :

$$|\phi_A(jnj''m'')\rangle = \sum_{m', \nu'} \begin{pmatrix} j & n & j'' \\ m' & \nu' & m'' \end{pmatrix} A_{\nu'}^{(n)}|jm'\rangle, \quad (4.17)$$

(Index  $A$  erinnert an Operator  $A$ ) mit

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 |\phi_A(jnj''m'')\rangle &= j''(j''+1) |\phi_A(jnj''m'')\rangle, \\ J_3 |\phi_A(jnj''m'')\rangle &= m'' |\phi_A(jnj''m'')\rangle, \\ J_\pm |\phi_A(jnj''m'')\rangle &= \sqrt{j''(j''+1) - m''(m'' \pm 1)} |\phi_A(jnj''m'' \pm 1)\rangle. \end{aligned}$$

Wie im Beweis von 4.3.13 (skalärer Operator) zeigt man

$$\langle j'm'|\phi_A(jnj''m'')\rangle = \delta_{j'j''} \delta_{m'm''} c_A(j', n, j). \quad (4.18)$$

Nun invertieren wir Gl. (4.17) mit Hilfe von Gl. (4.15)

$$\begin{aligned} &\sum_{j'', m''} \begin{pmatrix} j & n & j'' \\ m & \nu & m'' \end{pmatrix} |\phi_A(jnj''m'')\rangle \\ &= \sum_{j'', m'', m', \nu'} \begin{pmatrix} j & n & j'' \\ m & \nu & m'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & n & j'' \\ m' & \nu' & m'' \end{pmatrix} A_{\nu'}^{(n)}|jm'\rangle \\ &\stackrel{(4.15)}{=} \sum_{m', \nu'} \delta_{m'm} \delta_{\nu'\nu} A_{\nu'}^{(n)}|jm'\rangle = A_\nu^{(n)}|jm\rangle. \end{aligned}$$

Schließlich „multiplizieren“ wir von links mit  $\langle j'm'|$

$$\begin{aligned}
\langle j'm'|A_\nu^{(n)}|jm\rangle &= \sum_{j'',m''} \left( \begin{array}{cc|c} j & n & j'' \\ m & \nu & m'' \end{array} \right) \langle j'm'|\phi_A(jn;j''m'')\rangle \\
&\stackrel{(4.18)}{=} \sum_{j'',m''} \left( \begin{array}{cc|c} j & n & j'' \\ m & \nu & m'' \end{array} \right) \delta_{j'j''}\delta_{m'm''}c_A(j',n,j) \\
&= \left( \begin{array}{cc|c} j & n & j' \\ m & \nu & m' \end{array} \right) c_A(j',n,j) \Rightarrow \text{Behauptung.}
\end{aligned}$$

**Satz 4.3.18** Sphärische Tensoroperatoren lassen sich wie Drehimpulse koppeln. Sind  $A^{(n_1)}$  und  $B^{(n_2)}$  irreduzible Tensoren, so auch ihr „Tensorprodukt  $n$ -ter Stufe“ ( $|n_1 - n_2| \leq n \leq n_1 + n_2$ )

$$[A^{(n_1)} \times B^{(n_2)}]_\nu^{(n)} := \sum_{\nu_1, \nu_2} \left( \begin{array}{cc|c} n_1 & n_2 & n \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{array} \right) A_{\nu_1}^{(n_1)} B_{\nu_2}^{(n_2)}.$$

Vergleiche die Analogie zu

$$|(j_1 j_2) jm\rangle = \sum_{m_1, m_2} \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_1 & m \end{array} \right) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle.$$

Beachte allerdings, dass bei der Kopplung zweier irreduzibler Tensoren  $A^{(n_1)}$  und  $B^{(n_2)}$  diese sich auf zwei verschiedene „Teilchen“ (besser Räume) beziehen können, aber nicht müssen! Entscheidend sind vielmehr die Vertauschungsrelationen aus Anmerkung 4.3.15 mit dem Gesamtdrehimpulsoperator!

Beweis: Gemäß Anmerkung 4.3.15 untersuchen wir

$$\begin{aligned}
[J_3, [A^{(n_1)} \times B^{(n_2)}]_\nu^{(n)}] &= \sum_{\nu_1, \nu_2} \left( \begin{array}{cc|c} n_1 & n_2 & n \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{array} \right) \underbrace{[J_3, A_{\nu_1}^{(n_1)} B_{\nu_2}^{(n_2)}]}_{A_{\nu_1}^{(n_1)} [J_3, B_{\nu_2}^{(n_2)}] + [J_3, A_{\nu_1}^{(n_1)}] B_{\nu_2}^{(n_2)}} \\
&= \sum_{\nu_1, \nu_2} \left( \begin{array}{cc|c} n_1 & n_2 & n \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{array} \right) \underbrace{(\nu_1 + \nu_2)}_\nu A_{\nu_1}^{(n_1)} B_{\nu_2}^{(n_2)} \\
&= \nu [A^{(n_1)} \times B^{(n_2)}]_\nu^{(n)}, \quad \checkmark
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[J_{\pm}, [A^{(n_1)} \times B^{(n_2)}]_{\nu}^{(n)}] &= \sum_{\nu_1, \nu_2} \binom{n_1 \quad n_2}{\nu_1 \quad \nu_2} \Big| \begin{matrix} n \\ \nu \end{matrix} [J_{\pm}, A_{\nu_1}^{(n_1)} B_{\nu_2}^{(n_2)}] \\
&= \sum_{\nu_1, \nu_2} \binom{n_1 \quad n_2}{\nu_1 \quad \nu_2} \Big| \begin{matrix} n \\ \nu \end{matrix} \left( \sqrt{n_1(n_1+1) - \nu_1(\nu_1 \pm 1)} A_{\nu_1 \pm 1}^{(n_1)} B_{\nu_2}^{(n_2)} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{n_2(n_2+1) - \nu_2(\nu_2 \pm 1)} A_{\nu_1}^{(n_1)} B_{\nu_2 \pm 1}^{(n_2)} \right) \\
&\stackrel{*}{=} \sum_{\nu_1, \nu_2} \left[ \binom{n_1 \quad n_2}{\nu_1 \mp 1 \quad \nu_2} \Big| \begin{matrix} n \\ \nu \end{matrix} \sqrt{n_1(n_1+1) - \nu_1(\nu_1 \mp 1)} \right. \\
&\quad \left. + \binom{n_1 \quad n_2}{\nu_1 \quad \nu_2 \mp 1} \Big| \begin{matrix} n \\ \nu \end{matrix} \sqrt{n_2(n_2+1) - \nu_2(\nu_2 \mp 1)} \right] A_{\nu_1}^{(n_1)} B_{\nu_2}^{(n_2)} \\
&\stackrel{**}{=} \sum_{\nu_1, \nu_2} \sqrt{(n \mp \nu)(n \pm \nu + 1)} \binom{n_1 \quad n_2}{\nu_1 \quad \nu_2} \Big| \begin{matrix} n \\ \nu \pm 1 \end{matrix} A_{\nu_1}^{(n_1)} B_{\nu_2}^{(n_2)} \\
&= \sqrt{(n \mp \nu)(n \pm \nu + 1)} [A^{(n_1)} \times B^{(n_2)}]_{\nu \pm 1}^{(n)}. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

• \*: Wir betrachten

$$\Sigma = \sum_{m=-j}^j \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} f(m).$$

Setze  $n := m \pm 1 \Rightarrow m = n \mp 1$ :

$$\Sigma = \sum_{n=-j \pm 1}^{j \pm 1} \sqrt{j(j+1) - (n \mp 1)n} f(n \mp 1).$$

Beachte

1. „+“:

$$j(j+1) - (n-1)n = 0 \text{ f\u00fcr } \begin{cases} n = -j & \text{neue Untergrenze,} \\ n = j+1 & \text{alte Obergrenze.} \end{cases}$$

2. „-“:

$$j(j+1) - (n+1)n = 0 \text{ f\u00fcr } \begin{cases} n = -(j+1) & \text{alte Untergrenze,} \\ n = j & \text{neue Obergrenze.} \end{cases}$$

Wir k\u00f6nnen daher

$$\sum_{n=-j}^j \dots$$

schreiben. Mit der Umbenennung  $n \rightarrow m$  folgt

$$\Sigma = \sum_{m=-j}^j \sqrt{j(j+1) - m(m \mp 1)} f(m \mp 1).$$

- \*\*: Rekursionsformel für CG-Koeffizienten; Übung 13, Aufgabe 5. mit Ersetzung  $(j_1, j_2, j) \mapsto (n_1, n_2, n)$  und  $\pm(m_1, m_2, m) \mapsto \mp(\nu_1, \nu_2, \nu)$ .

**Beispiel 4.3.19** 1. Als „Skalarprodukt“ zweier sphärischer Tensoren  $n$ -ter Stufe  $A^{(n)}$  und  $B^{(n)}$  bezeichnet man

$$[A^{(n)} \times B^{(n)}]_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sum_{\nu} (-)^{n-\nu} A_{\nu}^{(n)} B_{-\nu}^{(n)}.$$

Beachte

$$\left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & 0 \\ m_1 & m_2 & 0 \end{array} \right) = \frac{(-)^{j_1-m_1}}{\sqrt{2j_1+1}} \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1, -m_2}.$$

Spezialfall:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{\nu} (-)^{\nu} A_{\nu}^{(1)} B_{-\nu}^{(1)} = -\sqrt{3} [A^{(1)} \times B^{(1)}]_0^{(0)}.$$

2. „Kreuzprodukt“:

$$[A^{(1)} \times B^{(1)}]_{\mu}^{(1)} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\vec{A} \times \vec{B})_{\mu}.$$

## 4.4 Beispiele

**Beispiel 4.4.1 Auswahlregeln für elektrische Dipolstrahlung.** Betrachte einen rotationsinvarianten Einteilchen-Hamilton-Operator für ein Elektron (vernachlässige Spin)

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r).$$

Die Kopplung an die elektromagnetischen Potentiale  $\phi$  und  $\vec{A}$  erfolgt durch minimale Substitution

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} - q\phi, \\ -i \vec{\nabla} &\rightarrow -i \vec{\nabla} - q\vec{A}, \end{aligned}$$

mit  $e > 0$  ( $q = -e$  für Elektron):

$$H = H_0 + H_{\text{ww}} = H_0 - e\phi + e \frac{\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p}}{2m} + \frac{e^2 \vec{A}^2}{2m}.$$

Der Ansatz für das elektromagnetische Potenzial einer ebenen Welle mit Wellenvektor  $\vec{k}$  und Polarisationsvektor  $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda)$  in Coulomb-Eichung ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , so dass für  $\rho(t, \vec{x}) = 0$  auch  $A^0 = \phi = 0$  folgt) lautet

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = a(\vec{k}, \lambda) \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + a^*(\vec{k}, \lambda) \vec{\epsilon}^*(\vec{k}, \lambda) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$



mit  $\vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0$  und  $\omega = |\vec{k}|$  (Argumente des Polarisationsvektors werden im Folgenden unterdrückt). Bis zur ersten Ordnung in  $e$  gilt (Coulomb-Eichung)

$$H_{\text{ww}} = e \frac{\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p}}{2m}.$$

Die elektrische Dipolnäherung resultiert aus der Langwellennäherung

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = 1 + O(|\vec{k}| |\vec{x}|).$$

Beispiel Wasserstoffatom:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_2 - E_1 = 10.2 \text{ eV}, \\ |\vec{k}| |\vec{x}| &\ll 1, \text{ d. h. } |\vec{x}| \ll \frac{1}{|\vec{k}|} = \frac{1}{\Delta E}. \end{aligned}$$

Verwende  $1 \text{ eV} \approx 0.5 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ . Bohr-Radius  $a_0 = 0.53 \times 10^{-10} \text{ m} \ll \frac{1}{\Delta E} \approx 2 \times 10^{-8} \text{ m}$ .

Berechne Übergangsmatrixelemente für die Emission eines Photons in zeitabhängiger Störungstheorie. Dazu benötigen wir das Matrixelement

$$\frac{e}{m} \langle \alpha' l' m' | \vec{\epsilon}^* \cdot \vec{p} | \alpha l m \rangle.$$

Benutze

$$\vec{p} = im[H_0, \vec{r}] = im \left[ \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r), \vec{r} \right].$$

$$\Rightarrow ie \langle \alpha' l' m' | [H_0, \vec{r} \cdot \vec{\epsilon}^*] | \alpha l m \rangle = ie(E_{\alpha' l'} - E_{\alpha l}) \langle \alpha' l' m' | \vec{r} \cdot \vec{\epsilon}^* | \alpha l m \rangle,$$

mit  $\omega = E_{\alpha l} - E_{\alpha' l'}$  (aus der Energieerhaltung). Wir schreiben

$$\vec{r} \cdot \vec{\epsilon}^* = (-)^{\mu} r_{\mu}^{(1)} \epsilon_{-\mu}^{(1)*}$$

und wenden nun das WE-Theorem an:

$$\langle \alpha' l' m' | r_{\mu}^{(1)} | \alpha l m \rangle = \left( \begin{array}{cc|c} l & 1 & l' \\ m & \mu & m' \end{array} \right) \frac{\langle \alpha' l' | | r^{(1)} | | \alpha l \rangle}{\sqrt{2l' + 1}}.$$

Auswahlregeln für elektrische Dipolstrahlung:

1. WE-Theorem:

(a)  $\Delta l = l - l' = \pm 1, 0$ .

(b)  $\Delta m = m - m'$ : 0 für  $\vec{\epsilon}$  in  $z$ -Richtung,  $\pm 1$  für  $\vec{\epsilon}$  in der  $(x, y)$ -Ebene.

2. Parität:  $\Delta l = 0$  nicht erlaubt, denn:

$$\begin{aligned} \langle \alpha' l m' | \vec{r} | \alpha l m \rangle &= \underbrace{\langle \alpha' l m' | P^{-1}}_{(-)^l} \underbrace{P \vec{r} P^{-1}}_{-\vec{r}} \underbrace{P | \alpha l m \rangle}_{(-)^l} \\ &= \underbrace{(-)^{2l+1}}_{-1} \langle \alpha' l m' | \vec{r} | \alpha l m \rangle = 0. \end{aligned}$$

**Vorbemerkung 4.4.2** Unter einer **inneren Symmetrie** versteht man die Invarianz eines Systems, genauer seines Hamilton-Operators, bzgl. Transformationen innerer Freiheitsgrade.

**Beispiel 4.4.3 Isospininvarianz der starken Wechselwirkung.**

Literatur:

- T. Ericson and W. Weise, *Pions and Nuclei*, Clarendon Press, Oxford, 1988

Fakten:

- Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte: Wechselwirkung ist invariant bzgl.  $p \leftrightarrow n$

Beispiele:

- Nukleon-Nukleon-Streuung
- Spiegelkerne: Kerne, die durch Vertauschen der Protonen- und Neutronenzahl auseinander hervorgehen. Könnte man die elektromagnetische Wechselwirkung abschalten und perfekte Isospin-symmetrie einführen, dann würden Spiegelkerne die gleichen Eigenschaften aufweisen.

Beispiel:  ${}^1_5\text{B}_6$  (5  $p$  und 6  $n$ ) und  ${}^1_6\text{C}_5$

- 1932: Entdeckung des Neutrons durch Chadwick.

Heisenberg: Betrachte Proton und Neutron in Analogie zum Elektron mit Spinprojektionen  $m_s = \pm\frac{1}{2}$  als ein und dasselbe Teilchen (Nukleon) in zwei verschiedenen Zuständen mit Isospinprojektionen  $\pm\frac{1}{2}$ .

Literatur: G. Rasche, *Zur Geschichte des Begriffes „Isospin“*, Arch. Hist. Exact. Sci. **7**, 257 (1971).

- Elektron: Externes Magnetfeld unterscheidet zwischen Spinprojektionen.
- Nukleon: Elektromagnetische Wechselwirkung (z.B. elektrisches Feld) unterscheidet zwischen Isospinprojektionen. Proton (Ladung +1) und Neutron (Ladung 0):

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y, \quad Y: \text{Hyperladung (1 für Nukleonen).}$$

- Annahme: Die starke Wechselwirkung besitzt eine innere SU(2)-Symmetrie, d. h.

$$[H_{\text{st}}, I_i] = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad [I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk}I_k.$$

Die Basisvektoren irreduzibler Darstellungen werden durch den Gesamtisospin  $I$  mit Multiplizität  $2I + 1$  ( $I_3 = I, I - 1, \dots, -I$ ) gekennzeichnet.

Name	$I$	$I_3$	$Y$	Masse [MeV]	Lebensdauer [s] Breite [MeV]	(Haupt-) Zerfall
Pion	1	$\pi^\pm : \pm 1$	0	140	$2.6 \cdot 10^{-8} \text{s}$	$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$
		$\pi^0 : 0$	0	135	$8.4 \cdot 10^{-17} \text{s}$	$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$
Nukleon	$\frac{1}{2}$	$p : \frac{1}{2}$	1	938	stabil ( $> 2.1 \times 10^{29}$ Jahre)	$pe^- \bar{\nu}_e$
		$n : -\frac{1}{2}$	1	940	886 s	
$\Delta$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$	1	1232	120 MeV	$N\pi$

Tabelle 4.1: Verschiedene Isospinmultipletts.  $(200 \text{ MeV})^{-1} \approx \frac{1}{3} \cdot 10^{-23} \text{ s}$ .

- Hinweise auf Invarianz

1. Existenz von Multipletts mit (nahezu) gleicher Masse und identischen Raumzeiteigenschaften (Spin und Parität), die zu Dimensionalitäten irreduzibler Darstellungen der zugrundeliegenden Symmetriegruppe passen. Siehe Tabelle 4.1.
2. Streuexperimente bzw. Zerfälle (Vergleich von Matrixelementen).

- Zu 2.:

- (a) Zerlege Anfangs- und Endzustand in Eigenzustände zu  $I$  und  $I_3$ .
- (b) Invarianz des Hamilton-Operators bzgl.  $SU(2)$  führt zu Invarianz der Streumatrix bzgl.  $SU(2)$  (analog zu Beispiel 4.3.13):

$$\langle I' I'_3 | T | I I_3 \rangle = T_I \delta_{I' I} \delta_{I'_3 I_3}. \quad (4.19)$$

Zur Illustration betrachten wir die  $\pi N$ -Streuung:

$$1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \stackrel{(4.19)}{\Rightarrow} 2 \text{ Amplituden } T_{\frac{3}{2}} \text{ und } T_{\frac{1}{2}}.$$

Clebsch-Gordan-Koeffizienten siehe 4.3.4 und Übung 13, Aufgabe 4.

Zur Erinnerung: Die Isospin-Projektionen sind additiv.

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle &= |p\pi^+\rangle, \\
 I_3 : \quad \frac{3}{2} &= \frac{1}{2} + 1, \\
 \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |p\pi^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |n\pi^+\rangle, \\
 \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |p\pi^-\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |n\pi^0\rangle, \\
 \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle &= |n\pi^-\rangle, \\
 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |p\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |n\pi^+\rangle, \\
 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |p\pi^-\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |n\pi^0\rangle.
 \end{aligned}$$

Die physikalischen Kanäle lauten ausgedrückt durch Isospineigenzustände

$$\begin{aligned}
 |p\pi^+\rangle &= \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle, \\
 |p\pi^0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \\
 |n\pi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \\
 |p\pi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \\
 |n\pi^0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \\
 |n\pi^-\rangle &= \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Exemplarisch:

$$\begin{aligned}
|p\pi^0\rangle &= \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 0 \right\rangle \\
&= \left| \left( \frac{1}{2} 1 \right) \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \underbrace{\left\langle \left( \frac{1}{2} 1 \right) \frac{3}{2} \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 0 \right\rangle \right.}_{\left( \begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{array} \left| \frac{3}{2} \right. \right) = \sqrt{\frac{2}{3}}} \\
&\quad + \left| \left( \frac{1}{2} 1 \right) \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \underbrace{\left\langle \left( \frac{1}{2} 1 \right) \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 0 \right\rangle \right.}_{\left( \begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{array} \left| \frac{1}{2} \right. \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}}.
\end{aligned}$$

Wir betrachten als Beispiel eine so genannte Ladungsaustauschreaktion (im Anfangszustand ist das Nukleon neutral und das Pion positiv geladen, im Endzustand ist es genau umgekehrt)

$$\begin{aligned}
\langle p\pi^0 | T | n\pi^+ \rangle &= \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right) T \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right) \\
(4.19) \quad &\stackrel{=}{=} \frac{\sqrt{2}}{3} (T_{\frac{3}{2}} - T_{\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

und völlig analog

$$\begin{aligned}
\langle p\pi^0 | T | p\pi^0 \rangle &= \frac{1}{3} (2T_{\frac{3}{2}} + T_{\frac{1}{2}}), \\
\langle n\pi^+ | T | n\pi^+ \rangle &= \frac{1}{3} (T_{\frac{3}{2}} + 2T_{\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle p\pi^0 | T | p\pi^0 \rangle - \langle n\pi^+ | T | n\pi^+ \rangle = \frac{1}{3} (T_{\frac{3}{2}} - T_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle p\pi^0 | T | n\pi^+ \rangle.$$

Wirkungsquerschnitte sind proportional zu  $|T_{fi}|^2$ . Im Schwerpunktsystem gilt für den Übergang  $i$  nach  $f$  (Konvention von Ericson und Weise)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{m_N}{4\pi\sqrt{s}} \right)^2 |T_{fi}|^2,$$

wobei  $\sqrt{s}$  die Gesamtenergie im Schwerpunktsystem ist. Für Wirkungsquerschnitte *bei gleichen Kinematiken* folgen Dreiecksungleichungen ( $a + b = c$ ,  $|c| \leq |a| + |b|$ ) (siehe Fig. 4.2):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma(n\pi^+ \rightarrow p\pi^0)} \leq \sqrt{\sigma(p\pi^0 \rightarrow p\pi^0)} + \sqrt{\sigma(n\pi^+ \rightarrow n\pi^+)}.$$

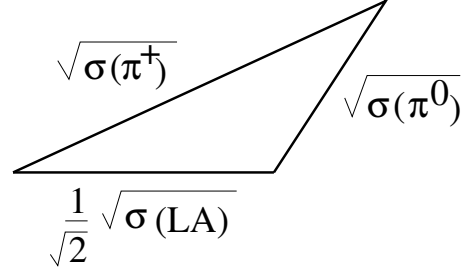


Abbildung 4.2: Dreiecksungleichungen für Pion-Nukleon-Streuung (Geometrische Interpretation der Dreiecksungleichung: Zwei Dreiecksseiten sind zusammen länger als die dritte).

Weiteres Beispiel (Betrachtungen unterhalb der Schwelle für  $\pi N \rightarrow N\pi\pi$ ):

$$\begin{aligned}\pi^- p \rightarrow \pi^- p & : \frac{1}{3}T_{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}T_{\frac{1}{2}}, \\ \pi^- p \rightarrow \pi^0 n & : \frac{\sqrt{2}}{3}(T_{\frac{3}{2}} - T_{\frac{1}{2}}).\end{aligned}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ergibt sich als Summe aller offenen Kanäle:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{tot}}(\pi^- p) & = \sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) + \sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) \\ & \quad \text{(gemischte Terme heben sich weg)} \\ & = \frac{1}{9}\sigma\left(I = \frac{3}{2}\right) + \frac{4}{9}\sigma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{9}\sigma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{9}\sigma\left(\frac{1}{2}\right) \\ & = \frac{1}{3}\sigma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3}\sigma\left(\frac{1}{2}\right), \\ \sigma_{\text{tot}}(\pi^+ p) & = \sigma\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

In der Nähe der Delta-Resonanz dominiert Isospin  $\frac{3}{2}$  vollständig, d. h.  $\sigma\left(\frac{3}{2}\right) \gg \sigma\left(\frac{1}{2}\right)$  (siehe Abbildung 4.3):

$$\sigma_{\text{tot}}(\pi^+ p) \approx 3\sigma_{\text{tot}}(\pi^- p).$$

**Beispiele 4.4.4**  $H_{\text{st}}$  ist ein isoskalärer Operator und damit auch die Potenzen  $H_{\text{st}}^n$ , die in der Störungsentwicklung der Streumatrix auftreten. Wende Gl. (4.19) an.

1. NN-Streuung:  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0 \Rightarrow 2$  Isospinamplituden.
2.  $\pi\pi$ -Streuung:  $1 \otimes 1 = 2 \oplus 1 \oplus 0 \Rightarrow 3$  Amplituden.

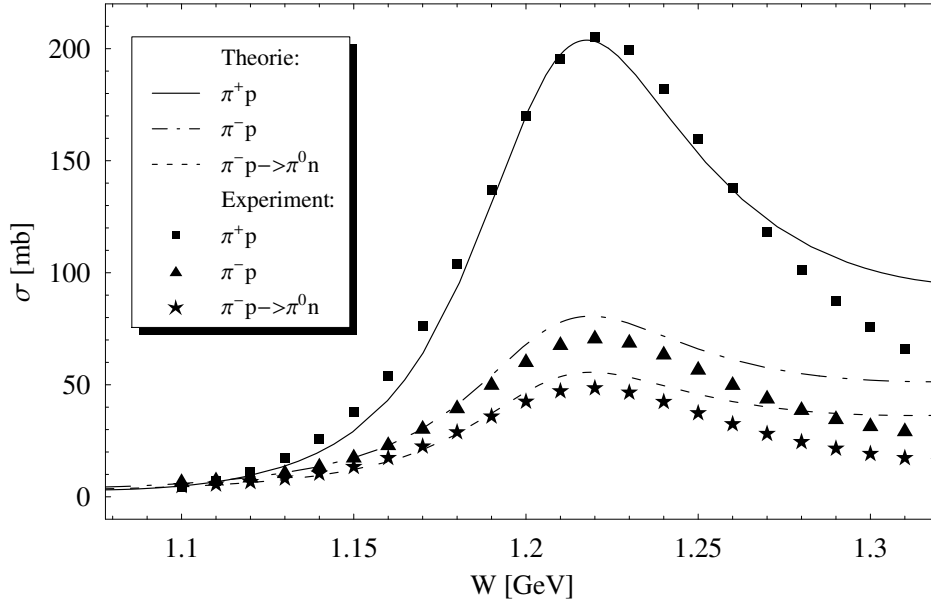


Abbildung 4.3: Totaler Wirkungsquerschnitt für die Pion-Nukleon-Streuung im Bereich der Delta-Resonanz. Die Daten stammen aus der Datenbasis Virginia Tech Partial-Wave Analysis Facility (SAID), <http://gwdac.phys.gwu/>, die theoretische Rechnung aus N. Wies, Die Deltaresonanz in effektiver Feldtheorie, Diplomarbeit, Institut für Kernphysik, Johannes Gutenberg-Universität, Mainz, September 2005.

3.  $\pi N \rightarrow \Delta: 1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2} \Rightarrow 1$  Amplitude.

4.  $\pi N \rightarrow \Delta\pi: 1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2} \otimes 1 = \frac{5}{2} \oplus \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \Rightarrow 2$  Amplituden.

**Beispiel 4.4.5** Photopionproduktion  $\gamma N \rightarrow N\pi$ . Wende Wigner-Eckart-Theorem und Satz 4.3.18 an.

$$H_{\text{int}} = H_{\text{st}} + H_{\text{em}},$$

wobei  $H_{\text{em}}$  einen Anteil 0. Stufe  $H_{\text{em}}^{(0)}$  und einen 1. Stufe  $H_{\text{em}}^{(1)}$  enthält. Z. B. Wechselwirkung des elektromagnetischen Felds mit einem punktförmigen Nukleon (Dirac-Fermion ohne anomales magnetisches Moment):

$$\mathcal{L}_{\gamma NN} = -e\bar{\psi}\not{A}\frac{1+\tau_0}{2}\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}.$$

Betrachte die Streumatrix in niedrigster Ordnung in  $e$  aber beliebiger Ordnung in  $H_{\text{st}}$ . Da  $H_{\text{st}}$  ein isoskalarer Operator ist, ändern auch beliebige Potenzen von  $H_{\text{st}}$  den Isospin nicht. Es genügt daher, die Wirkung von  $H_{\text{em}}$  zu untersuchen.

- $H_{\text{em}}^{(0)}|N\rangle: 0 \otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ , da Tensor 0. Stufe den Isospin nicht ändert  $\rightarrow 1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \Rightarrow 1$  Amplitude  $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ .

- $H_{\text{em}}^{(1)}|N\rangle: 1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}$ , da Tensor 1. Stufe Isospin übertragen kann  
 $\rightarrow 1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}. \Rightarrow 2$  Amplituden  $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$  und  $\frac{3}{2} \rightarrow \frac{3}{2}$ .

D. h. insgesamt existieren 3 Isospinamplituden für 4 physikalische Prozesse:  $\gamma p \rightarrow p\pi^0, n\pi^+$  und  $\gamma n \rightarrow n\pi^0, p\pi^-$  (siehe auch Übung 15, Aufgaben 5. und 6.).

**Anmerkung 4.4.6** Isospinsymmetrie ist keine perfekte Symmetrie der starken Wechselwirkung. Beispielsweise gilt  $m_n > m_p$ , obwohl man aufgrund der elektromagnetischen Wechselwirkung  $m_p > m_n$  erwarten würde. „Grund“:  $n = udd, p = uud, m_u \approx 1.5 - 3 \text{ MeV}, m_d \approx 3 - 7 \text{ MeV}$ .



# Kapitel 5

## SU(N) und Quarks

### 5.1 Physikalische Motivation

- Hinweise für Substruktur der Hadronen (exemplarisch)
  1. Ausdehnung (Formfaktoren; z. B. mittlerer quadratischer Radius des Protons  $r_E^p = (0.8750 \pm 0.0068)$  fm)
  2. Anregungsspektrum
  3. Tiefinelastische Streuung (punktförmige Partonen)
- Interpretation: Hadronen sind (komplizierte) Bindungszustände aus fundamentalen Freiheitsgraden.
- „Fundamentale Theorie“: Quantenchromodynamik (QCD). Die QCD ist eine nichtabelsche Eichtheorie mit einer Eichgruppe  $G = SU(3)_c$  ( $c$  für *color*, siehe Kapitel 7.2).
- Bei den Materiefeldern, den so genannten Quarks, handelt es sich um Fermionen mit Spin  $1/2$ , die in sechs verschiedenen *flavors* vorkommen:

„Leichte“ Quarks:

<i>flavor</i>	<i>u</i>	<i>d</i>	<i>s</i>
Masse [MeV]	1.5 – 3.3	3.5 – 6.0	70 – 130
Ladung [ $e > 0$ ]	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$I_3$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
			Strangeness: -1

„Schwere“ Quarks:

<i>flavor</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>t</i>
Masse [GeV]	$1.27^{+0.07}_{-0.11}$	$4.20^{+0.17}_{-0.07}$	$171.2 \pm 2.1$
Ladung [ $e > 0$ ]	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$I_3$	0	0	0
	Charm: +1	Bottom: -1	Top: +1

Siehe: A. V. Manohar und C. T. Sachrajda, *Quark Masses*, in: Particle Data Group, Review of Particle Physics, Phys. Lett. B **667**, 1 (2008), <http://pdg.lbl.gov/>.

- Jeder Quarkflavor besitzt drei „Farbfreiheitsgrade“.

---

$\Delta^{++}(S_z = \frac{3}{2}) = u \uparrow u \uparrow u \uparrow$ , Widerspruch zum Pauli-Prinzip, Slater-Determinante

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} r_1 & g_1 & b_1 \\ r_2 & g_2 & b_2 \\ r_3 & g_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$


---

- 8 Gluonen (Spin 1, masselos) vermitteln die Wechselwirkung.
- Die Wechselwirkung ist flavorunabhängig.
- Freie Quarks und Gluonen werden nicht beobachtet ( $\Rightarrow$  Farbeinschluss- oder Confinement-Hypothese).
- Baryonen:  $qqq$ -Zustände aus 3 Quarks; farbneutral durch Slater-Determinante.
- Mesonen:  $q\bar{q}$ -Quark-Antiquark-Zustand; farbneutral durch  $\frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})$ .

## 5.2 Mathematische Vorbemerkungen

- Ziel: Klassifikation irreduzibler Darstellungen von  $SU(N)$
- Methode: Konstruktion als direkte Produkte über die Trägerräume der fundamentalen Darstellung bzw. der dazu komplex konjugierten Darstellung
- Anwendung: Mesonen und Baryonen (Hadronen)

**Definition 5.2.1 Dualer Raum.** Es sei  $X$  ein  $N$ -dimensionaler komplexer Hilbert-Raum mit Orthonormalbasis  $\{\chi_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Dann ist  $X^* := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ lineares Funktional auf } X\}$  der zu  $X$  duale Raum. Es gilt

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(x) &= \alpha f(x) + \beta g(x), \\ f(\alpha x + \beta y) &= \alpha f(x) + \beta f(y),\end{aligned}$$

$\forall x, y \in X, f, g \in X^*, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Die duale Basis  $\{\chi_i^*\}$  zu  $\{\chi_i\}$  wird durch

$$\chi_i^*(\chi_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

definiert.

Häufig aber nicht immer günstige Dirac'sche Bra- und Ket-Schreibweise:

- Kets  $|a\rangle$  sind Basisvektoren von  $X$ .
- Die zu den Kets konjugierten Bras  $\langle a|$  sind Basisvektoren des zu  $X$  dualen Raums  $X^*$ .
- $\chi_b^*(\chi_a) = \langle b|a\rangle = \delta_{ab}$ .

**Beispiel 5.2.2**  $N = 2$ :

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_1^* = (1 \ 0), \quad \chi_2^* = (0 \ 1),$$

$$X \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad X^* \ni f = (f_1 \ f_2),$$

$$f(x) = (f_1 \ f_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = f_1 x_1 + f_2 x_2 \in \mathbb{C}.$$

Alternativ:

$$\begin{aligned}x &= x_1|1\rangle + x_2|2\rangle, \\ f &= f_1\langle 1| + f_2\langle 2|, \\ f(x) &= \langle f|x\rangle = f_1 x_1 + f_2 x_2.\end{aligned}$$

**5.2.3 Transformationsverhalten von „SU(N)-Quarks und -Anti-quarks“.** Es sei  $X$  ein  $N$ -dimensionaler komplexer Hilbert-Raum mit ONB  $\{\chi_i\}$ :

$$X \ni \psi = \sum_{i=1}^N \psi_i \chi_i, \quad \psi_i \in \mathbb{C}.$$

1. Beschreibung des Flavor-Freiheitsgrades

Z. B.  $N = 3$ :  $\chi_1, \chi_2$  und  $\chi_3$  beschreiben respektive den Basiszustand eines  $u$ -,  $d$ - und  $s$ -Quarks.

## 2. Beschreibung des Farbfreiheitsgrades

$N = N_c = 3$ :  $\chi_1, \chi_2$  und  $\chi_3$  beschreiben respektive den Basiszustand eines „roten“, „grünen“ und „blauen“ Quarks.

Das Transformationsverhalten unter  $U \in \text{SU}(N)$  lautet für einen normierten Quarkzustand  $\psi = \psi_i \chi_i \in X$  (Einstein'sche Summenkonvention)

$$\psi \mapsto U\psi = \psi_i U \chi_i = \chi_j U_{ji} \psi_i.$$

Analog werden Antiquarks durch  $\chi_i^*$  beschrieben mit dem Transformationsverhalten für  $\phi^* = \phi_i \chi_i^* \in X^*$

$$\phi^* \mapsto U^* \phi^* = \phi_i U^* \chi_i^* = \chi_j^* U_{ji}^* \phi_i.$$

**Fazit:** Quarks/Antiquarks werden mit Hilfe der ONB  $\{\chi_i\}/\{\chi_i^*\}$  des Träger-raums der Fundamentaldarstellung/komplex konjugierten Darstellung beschrieben (siehe 2.2.11).

**Definition 5.2.4 Obere und untere Spinoren.** Sei  $U \in \text{SU}(N)$  mit  $U_{ij}$  dem Eintrag in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte,  $i, j = 1, \dots, N$ . Wir benutzen auch folgende in der Literatur übliche Konvention und ersetzen

$$\begin{aligned} \psi_i &\mapsto \psi_i, & \chi_i &\mapsto \chi^i, & U_{ij} &\mapsto U_i^j, \\ \phi_i &\mapsto \phi^i, & \chi_i^* &\mapsto \chi_i^*, & U_{ij}^* &\mapsto U^i_j. \end{aligned}$$

Für eine allgemeine  $\text{SU}(N)$  unterscheidet man 2 verschiedene Typen von Spinoren, je nach Transformationsverhalten der Komponenten:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_i \chi^i, & U \chi^i &= U_j^i \chi^j, & \psi'_j &= U_j^i \psi_i, \\ \phi^* &= \phi^i \chi_i^*, & U^* \chi_i^* &= U^j_i \chi_j^*, & \phi'^j &= U^j_i \phi^i, \end{aligned}$$

d. h. untere Spinoren ( $\psi$ ) transformieren bzgl. der Fundamentaldarstellung und obere Spinoren ( $\phi^*$ ) bzgl. der dazu komplex konjugierten Darstellung.

**Definition 5.2.5** Ein  $\text{SU}(N)$ -Tensor  $T_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}$  ist ein  $N^{m+n}$ -komponentiges Objekt, das bzgl.  $\text{SU}(N)$  wie

$$T_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} = U_{i_1}^{k_1} \dots U_{i_m}^{k_m} U^{j_1}_{l_1} \dots U^{j_n}_{l_n} T_{k_1 \dots k_m}^{l_1 \dots l_n}$$

transformiert.

**Beispiel 5.2.6** Die Komponenten  $\psi_i$  und  $\phi^i$  eines Quark- bzw. Antiquark-spinors bilden jeweils  $\text{SU}(N)$ -Tensoren 1. Stufe.

**5.2.7 Unitaritätsbedingung.** Die Unitaritätsbedingung für Elemente  $U \in \text{SU}(N)$  lässt sich folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= (U^\dagger U)_{ij} = U_{ik}^\dagger U_{kj} = U_{ki}^* U_{kj} = U^k_i U_k^j =: \delta_i^j, \\ \delta_{ij} &= (U U^\dagger)_{ij} = U_{ik} U_{kj}^\dagger = U_{ik} U_{jk}^* = U_i^k U^j_k = \delta_i^j. \end{aligned}$$

### 5.2.8 Die $N^2$ Zahlen

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

bilden einen invarianten  $SU(N)$ -Tensor, denn

$$\delta_i^j = U_i^k U^j_l \delta_k^l = U_i^k U^j_k = \delta_i^j.$$

### 5.2.9 Die $N^N$ Zahlen

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} = \begin{cases} 1 & \text{für } (i_1, i_2, \dots, i_N) \text{ gerade Permutation von } (1, 2, \dots, N), \\ -1 & \text{für } (i_1, i_2, \dots, i_N) \text{ ungerade Permutation von } (1, 2, \dots, N), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

bilden einen invarianten  $SU(N)$ -Tensor. Siehe Übung 16, Aufgabe 5.

Analog für

$$\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N} = \begin{cases} 1 & \text{für } (i_1, i_2, \dots, i_N) \text{ gerade Permutation von } (1, 2, \dots, N), \\ -1 & \text{für } (i_1, i_2, \dots, i_N) \text{ ungerade Permutation von } (1, 2, \dots, N), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**5.2.10 Zusammengesetzte Zustände.** Den Zuständen zusammengesetzter Systeme werden entsprechende Zustände des Tensorproduktes

$$\begin{aligned} X \otimes X \otimes X & \quad \text{für Baryonen,} \\ X \otimes X^* & \quad \text{für Mesonen} \end{aligned}$$

zugeordnet. Symbolisch:

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^N C_{i_1 i_2 i_3} \chi^{i_1} \otimes \chi^{i_2} \otimes \chi^{i_3}, \\ M &= \sum_{i, j=1}^N C_i^j \chi^i \otimes \chi_j^*, \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten  $C_{i_1 i_2 i_3}, C_i^j \in \mathbb{C}$  so gewählt sind, dass der Zustand normiert ist. Das zusammengesetzte System transformiert bzgl.  $SU(N)$  wie

$$\begin{aligned} B \mapsto B' &= C_{i_1 i_2 i_3} U \chi^{i_1} \otimes U \chi^{i_2} \otimes U \chi^{i_3} \\ &= U_{k_1}^{i_1} U_{k_2}^{i_2} U_{k_3}^{i_3} C_{i_1 i_2 i_3} \chi^{k_1} \otimes \chi^{k_2} \otimes \chi^{k_3} \\ &=: C'_{k_1 k_2 k_3} \chi^{k_1} \otimes \chi^{k_2} \otimes \chi^{k_3}, \\ M \mapsto M' &= C_i^j U \chi^i \otimes U^* \chi_j^* = U_k^i U^l_j C_i^j \chi^k \otimes \chi_l^* =: C'^l_k \chi^k \otimes \chi_l^*, \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} C'_{k_1 k_2 k_3} &= U_{k_1}^{i_1} U_{k_2}^{i_2} U_{k_3}^{i_3} C_{i_1 i_2 i_3}, \\ C'^l_k &= U_k^i U^l_j C_i^j. \end{aligned}$$

### 5.3 SU(2) (Isospin)

Die Isospininvarianz auf der Ebene der Hadronen resultiert mikroskopisch aus

1. der Flavorunabhängigkeit der Quark-Gluon-Wechselwirkung und
2. einer (zufälligen) Symmetrie der QCD:  $m_u \approx m_d \ll$  typische hadronische Skala  $\approx 1$  GeV ( $m_\rho = 770$  MeV,  $m_p = 938$  MeV).

Die Fundamentaldarstellung von SU(2),  $SU(2) \ni U \mapsto U$ , wirkt auf einem zweidimensionalen komplexen Hilbert-Raum  $X$  mit ONB  $\{\chi^1, \chi^2\}$  (siehe 5.2.4):

$$\chi^i \mapsto U_j^i \chi^j.$$

Physikalisch entspricht  $\chi^1$  ( $\chi^2$ ) dem Zustand eines  $u$ -Quarks ( $d$ -Quarks) mit Isospinprojektion  $+\frac{1}{2}$  ( $-\frac{1}{2}$ ). Die Matrixdarstellung der Isospingeneratoren ist gerade durch die drei Pauli-Matrizen  $\frac{1}{2}\tau_j$  gegeben. Ein allgemeiner Quarkzustand lautet

$$\psi = \sum_{i=1}^2 \psi_i \chi^i, \quad \psi_i \in \mathbb{C}, \quad |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1,$$

oder in Spaltenmatrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix}.$$

Die transformierten Komponenten ergeben sich laut

$$\begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \psi'_u \\ \psi'_d \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix}.$$

SU(2) ist ein Sonderfall, da  $U$  und  $U^*$  äquivalent sind (siehe Beispiele 2.2.11 und Übung 9, Aufgabe 3.):

$$SUS^{-1} = U^* \quad \forall U \in SU(2) \tag{5.1}$$

mit

$$S = -i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da  $S^* = S$  und  $S^{-1*} = S^{-1}$ , gilt auch

$$SU^*S^{-1} = U \quad \forall U \in SU(2). \tag{5.2}$$

Ausgehend von unteren Spinoren für  $u$ - und  $d$ -Quarks (bzw.  $p$  und  $n$ ), bestünde die natürliche Konvention zur Beschreibung der Antiquarks aus oberen Spinoren (siehe 5.2.4) mit Einträgen

$$\phi^1 = \phi_{\bar{u}}, \quad \phi^2 = \phi_{\bar{d}}$$

und Transformationsverhalten

$$\begin{pmatrix} \phi_{\bar{u}} \\ \phi_{\bar{d}} \end{pmatrix} \mapsto U^* \begin{pmatrix} \phi_{\bar{u}} \\ \phi_{\bar{d}} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Wegen Gl. (5.1) ist es in  $SU(2)$  (!) gängig, auch die Antiquarks durch *untere* Spinoren zu beschreiben. Multipliziere dazu Gl. (5.3) mit  $S$  und füge eine Eins in Form von  $S^{-1}S$  ein,

$$\begin{aligned} S \begin{pmatrix} \phi_{\bar{u}} \\ \phi_{\bar{d}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\bar{u}} \\ \phi_{\bar{d}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\phi_{\bar{d}} \\ \phi_{\bar{u}} \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(5.3)}{\mapsto} SU^* \begin{pmatrix} \phi_{\bar{u}} \\ \phi_{\bar{d}} \end{pmatrix} = SU^* S^{-1} S \begin{pmatrix} \phi_{\bar{u}} \\ \phi_{\bar{d}} \end{pmatrix} \stackrel{(5.2)}{=} US \begin{pmatrix} \phi_{\bar{u}} \\ \phi_{\bar{d}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als Transformationseigenschaften

$$\begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix} \mapsto U \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -\phi_{\bar{d}} \\ \phi_{\bar{u}} \end{pmatrix} \mapsto U \begin{pmatrix} -\phi_{\bar{d}} \\ \phi_{\bar{u}} \end{pmatrix}.$$

**Anwendung 5.3.1** Wir betrachten zunächst Mesonen, die aus  $u$ - und  $d$ -Quarks und den zugehörigen Antiquarks bestehen. Der Hilbert-Raum ist das Tensorprodukt aus  $X_1$  zur Beschreibung der Quarks und  $X_2$  zur Beschreibung der Antiquarks

$$X = X_1 \otimes X_2$$

mit Basisvektoren

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für ein } u\text{-Quark,} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für ein } d\text{-Quark,} \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für ein } \bar{d}\text{-Antiquark,} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für ein } \bar{u}\text{-Antiquark.} \end{aligned}$$

Die Darstellungsmatrizen für die Isospinoperatoren lauten für *beide* Räume

$$\begin{aligned} \Psi_1(I_+) &= \Psi_2(I_+) = \frac{\tau_1}{2} + i\frac{\tau_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Psi_1(I_-) &= \Psi_2(I_-) = \frac{\tau_1}{2} - i\frac{\tau_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Psi_1(I_0) &= \Psi_2(I_0) = \frac{\tau_3}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich als Darstellungsmatrizen auf  $X$

$$\begin{aligned}\Psi(I_+) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Psi(I_-) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Psi(I_0) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1} + \frac{1}{2} \mathbb{1} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Das  $\pi^+$  ist ein zusammengesetzter Zustand aus einem  $u$ -Quark und einem  $\bar{d}$ -Antiquark und wird in  $X$  folgendermaßen beschrieben:

$$|\pi^+\rangle = |1, 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In der Physik wird für die rechte Seite auch einfach  $u\bar{d}$  geschrieben. Die beiden anderen Pionzustände ergeben sich durch die Anwendung des Absteigeoperators:

$$\begin{aligned}I_-|\pi^+\rangle &= \sqrt{2}|\pi^0\rangle \\ &= \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

d. h.

$$|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

oder in Physikerschreibweise

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} - u\bar{u}).$$

Mit Hilfe einer weiteren Anwendung des Absteigeoperators erhält man (siehe Übung 16, Aufgabe 6.)

$$|\pi^-\rangle = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -d\bar{u}.$$

Bemerkung: Unsere Konvention ist konsistent mit der Condon-Shortley-Phasenkonvention. Leider wird dies in vielen Büchern sehr unterschiedlich gehandhabt. Beispiel: Perkins, *Introduction to High Energy Physics*, Abschnitt 5.5 ist hier rigoros, Gottfried und Weisskopf, *Concepts of Particle Physics, Vol. 1*, Abschnitt 1.E.6 nicht.



**5.3.2 Graphische Konstruktion.** Jede Basis einer irreduziblen Darstellung  $j$  lässt sich durch eine Strecke der Länge  $2j$  mit  $2j + 1$  Punkten im Abstand 1 darstellen, die den Eigenwerten von  $J_3$  entsprechen:

$$j=1/2 \quad \begin{array}{c} -1/2 \quad 1/2 \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array}$$

$$j=1 \quad \begin{array}{c} -1 \quad 0 \quad 1 \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array}$$

$$j=3/2 \quad \begin{array}{c} -3/2 \quad -1/2 \quad 1/2 \quad 3/2 \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array}$$

In der Produktdarstellung  $j_1 \otimes j_2$  gilt  $J_3 = J_3(1) + J_3(2)$ , d. h. die einzelnen Eigenwerte sind **additiv**. Die graphische Konstruktion erfolgt durch wiederholte Überlagerung des Mittelpunkts der Basis zu  $j_1$  mit den einzelnen Punkten der  $j_2$ -Basis:

$$\begin{aligned} 1/2 \otimes 1/2 &= \bullet \text{---} \bullet \otimes \bullet \text{---} \bullet \\ &= \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} \\ &= \bullet \text{---} \bullet \quad = 1 \oplus 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1/2 \otimes 1 &= \bullet \text{---} \bullet \otimes \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ &= \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} \\ &= \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \quad = 3/2 \oplus 1/2 \end{aligned}$$

Die Operatoren  $J_{\pm}$  verschieben innerhalb eines Multipletts um eine Einheit nach rechts ( $J_+$ ) bzw. links ( $J_-$ ).

**Beispiel 5.3.3** Folgende Schreibweise ist in der Literatur üblich:  $uu$  steht für  $|u; u\rangle$  bzw.  $\chi^1 \otimes \chi^1$  usw.

Sei  $X = \mathbb{C}^2$  mit Orthonormalbasis  $\{\chi^1, \chi^2\}$ ,

$$X \ni x = c_i \chi^i,$$

und  $Y = X \otimes X$  mit

$$Y \ni y = c_{ij} \chi^i \otimes \chi^j.$$

$y$  ist symmetrisch bzw. antisymmetrisch bzgl.  $1 \leftrightarrow 2$  meint

$$c_{ij} = c_{ji} \quad \text{bzw.} \quad c_{ij} = -c_{ji} \quad \forall \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

- Isospin für (leichte) Baryonen

1. Schritt: Kopplung des ersten und zweiten Quarks mit Hilfe der Clebsch-Gordan-Koeffizienten aus Beispiel 4.3.3:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) &= 1 = \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{array} \right), \\ \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

$$I = 1 : \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & uu & \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du) & dd \\ \hline I_3 & 1 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} \quad \text{symmetrisch bzgl. } 1 \leftrightarrow 2.$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = - \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right).$$

$$I = 0 : \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du), \quad \text{antisymmetrisch bzgl. } 1 \leftrightarrow 2.$$

2. Schritt: Kopplung mit dem dritten Quark

(1)  $I = 3/2$  (exemplarisch)

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right) = 1, \quad \Rightarrow \quad \underbrace{uuu}_{I_3 = \frac{3}{2}}.$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$I_3 = \frac{1}{2} : \quad uu \frac{1}{\sqrt{3}}d + \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du) \sqrt{\frac{2}{3}}u = \frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu).$$

Die restlichen Zustände ergeben sich analog.

	$uuu$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(duu + udu + uud)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ddu + dud + udd)$	$ddd$
$I_3$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$

symmetrisch bzgl. Vertauschung zweier beliebiger Quarks (deshalb in der Literatur häufig auch  $\phi_S = |[(\frac{1}{2}\frac{1}{2})1\frac{1}{2}]^{\frac{3}{2}}\rangle$ , Index  $S$  für „symmetric“).

(2)  $I = 1/2$ .

(a) (Benutze CG-Koeffizienten aus Übung 13, Aufgabe 4):

$$\begin{aligned}
 uu \underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}} d}_{\text{CG-K}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du) \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) u}_{\text{CG-K}} &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}(2uud - udu - duu)}_{I_3 = \frac{1}{2}}, \\
 \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du) \frac{1}{\sqrt{3}}d + dd \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) u &= \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{6}}(2ddu - dud - udd)}_{I_3 = -\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Keine Symmetrie bzgl. Vertauschung  $1 \leftrightarrow 3$  oder  $2 \leftrightarrow 3$  (Index  $M$  für „mixed“), symmetrisch bzgl.  $1 \leftrightarrow 2$  (Index  $S$  für „symmetric“): deshalb auch Bezeichnung  $\phi_{M,S} = |[(\frac{1}{2}\frac{1}{2})1\frac{1}{2}]_{\frac{1}{2}}\rangle$ .

Ist die Phase tatsächlich konsistent? Dazu betrachten wir die Wirkung des Absteigeoperators

$$I_- = I_-(1) + I_-(2) + I_-(3)$$

auf den Zustand mit Eigenwert  $+\frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned}
 \left| \left[ \left[ \left( \frac{11}{22} \right) 1\frac{1}{2} \right] \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right] \right\rangle &= I_- \left| \left[ \left[ \left( \frac{11}{22} \right) 1\frac{1}{2} \right] \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\rangle \\
 &= [I_-(1) + I_-(2) + I_-(3)] \frac{1}{\sqrt{6}}(2uud - udu - duu) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{6}}[2(dud + udd + 0) - (ddu + 0 + udd) - (0 + ddu + dud)] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(dud + udd - 2ddu) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{6}}(2ddu - dud - udd). \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

(b)

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)u}_{I_3 = \frac{1}{2}}, \quad \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2}}(du - ud)d}_{I_3 = -\frac{1}{2}}.$$

Keine Symmetrie bzgl. Vertauschung  $1 \leftrightarrow 3$  oder  $2 \leftrightarrow 3$  (Index  $M$  für „mixed“), antisymmetrisch bzgl.  $1 \leftrightarrow 2$  (Index  $A$  für „antisymmetric“):  $\phi_{M,A} = |[(\frac{1}{2}\frac{1}{2})0\frac{1}{2}]_{\frac{1}{2}}\rangle$ .

- Clebsch-Gordan-Zerlegung für Isospin:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = (1 \oplus 0) \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2}.$$

Die beiden Isospin- $\frac{1}{2}$ -Multipletts unterscheiden sich in ihren Symmetrieeigenschaften.

- Spin analog:  $\chi_S, \chi_{M,S}, \chi_{M,A}$ . Ersetze  $u \rightarrow \uparrow$  und  $d \rightarrow \downarrow$ .
- Quarkmodellwellenfunktion für  $\Delta$  und Nukleon:

$$\begin{aligned}
|\Delta\rangle &= \underbrace{|\phi_S\rangle}_{\text{Isospin}} \otimes \underbrace{|\chi_S\rangle}_{\text{Spin}} \otimes \underbrace{|O_S\rangle}_{\text{Ortsraum}} \otimes \underbrace{|F_A\rangle}_{\text{Farbraum}}, \\
|N\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_{M,S}\rangle \otimes |\chi_{M,S}\rangle + |\phi_{M,A}\rangle \otimes |\chi_{M,A}\rangle) \otimes |O_S\rangle \otimes |F_A\rangle.
\end{aligned}$$

Farbraumzustand, siehe Übung 16, Aufgabe 5: Vollständig antisymmetrisch.

Annahme: Grundzustand symmetrisch im Ortsraum.

Als konkrete Beispiele betrachten wir jeweils die Spin-Flavor-Zustände für ein  $\Delta^{++}$  mit Spinprojektion  $S_z = 3/2$  und ein Proton mit Spinprojektion  $S_z = 1/2$ :

$$\Delta^{++} \left( S_z = \frac{3}{2} \right) = uuu \otimes \uparrow\uparrow\uparrow = \underbrace{u \uparrow u \uparrow u \uparrow}_{\text{Physikerschreibweise}},$$

$$\begin{aligned}
p \left( S_z = \frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{6}}(2uud - udu - duu) \otimes \frac{1}{\sqrt{6}}(2 \uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)u \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \uparrow \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{6}(4u \uparrow u \uparrow d \downarrow - 2u \uparrow u \downarrow d \uparrow - 2u \downarrow u \uparrow d \uparrow \right. \\
&\quad - 2u \uparrow d \uparrow u \downarrow + u \uparrow d \downarrow u \uparrow + u \downarrow d \uparrow u \uparrow \\
&\quad - 2d \uparrow u \uparrow u \downarrow + d \uparrow u \downarrow u \uparrow + d \downarrow u \uparrow u \uparrow) \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(u \uparrow d \downarrow u \uparrow - u \downarrow d \uparrow u \uparrow - d \uparrow u \downarrow u \uparrow + d \downarrow u \uparrow u \uparrow) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{18}} [2(u \uparrow u \uparrow d \downarrow + u \uparrow d \downarrow u \uparrow + d \downarrow u \uparrow u \uparrow) \\
&\quad - (u \uparrow u \downarrow d \uparrow + u \downarrow u \uparrow d \uparrow + u \uparrow d \uparrow u \downarrow \\
&\quad + d \uparrow u \uparrow u \downarrow + u \downarrow d \uparrow u \uparrow + d \uparrow u \downarrow u \uparrow)].
\end{aligned}$$

**Vorbereitung 5.3.4** Es sei  $X$  ein  $N$ -dimensionaler komplexer Hilbert-Raum. Gegeben seien zwei Zustände  $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle \in X \otimes X$ ,

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= \sum_{i,j=1}^N c_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle, \\
|\Phi\rangle &= \sum_{i,j=1}^N d_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle,
\end{aligned}$$

mit der Symmetrieeigenschaft

$$c_{ij} = c_{ji}, \quad d_{ij} = d_{ji}.$$

(Die Zustände  $|\Psi\rangle$  und  $|\Phi\rangle$  sind symmetrisch unter der Vertauschung von „Teilchen 1“ und „Teilchen 2“. Wir verzichten hier auf eine  $SU(N)$ -Schreibweise mit oberen und unteren Indizes.) Ferner bestehe  $\widehat{O}$  aus der Summe (identischer) Einteilchenoperatoren  $A$ :

$$\widehat{O} = \underbrace{A \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes A}_{\text{Mathematik}} = \underbrace{\sum_{i=1}^2 A(i)}_{\text{Physik}}.$$

Dann gilt:

$$\langle \Phi | \widehat{O} | \Psi \rangle = 2 \langle \Phi | A(1) | \Psi \rangle = 2 \langle \Phi | A(2) | \Psi \rangle.$$

Begründung:

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \widehat{O} | \Psi \rangle &= \sum_{i,j,k,l=1}^N d_{ij}^* c_{kl} \langle i | \otimes \langle j | (A \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes A) | k \rangle \otimes | l \rangle \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^N d_{ij}^* c_{kl} \left( \underbrace{\langle i | A | k \rangle}_{A_{ik}} \underbrace{\langle j | l \rangle}_{\delta_{jl}} + \underbrace{\langle i | k \rangle}_{\delta_{ik}} \underbrace{\langle j | A | l \rangle}_{A_{jl}} \right) \\ &= \underbrace{\sum_{i,j,k=1}^N d_{ij}^* c_{kj} A_{ik}}_{\langle \Phi | A(1) | \Psi \rangle} + \underbrace{\sum_{i,j,l=1}^N d_{ij}^* c_{il} A_{jl}}_{\langle \Phi | A(2) | \Psi \rangle}. \end{aligned}$$

Benutze nun:

$$\langle \Phi | A(2) | \Psi \rangle = \sum_{i,j,l=1}^N d_{ij}^* c_{il} A_{jl} = \sum_{i,j,l=1}^N d_{ji}^* c_{li} A_{jl} = \sum_{i,j,k=1}^N d_{ij}^* c_{kj} A_{ik} = \langle \Phi | A(1) | \Psi \rangle.$$

Bemerkung: Die Verallgemeinerung für ein  $n$ -faches Tensorprodukt  $X \otimes X \otimes \dots \otimes X$  zeigt man analog:

$$\langle \Phi | \widehat{O} | \Psi \rangle = n \langle \Phi | A(1) | \Psi \rangle = \dots = n \langle \Phi | A(n) | \Psi \rangle.$$

**Anwendung 5.3.5** Ladung des Protons. Betrachtet man nur  $u$ - und  $d$ -Quarks, so ergibt sich der Ladungsoperator eines Baryons als folgende Summe:

$$\widehat{Q} = \sum_{i=1}^3 Q(i) = \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{1}{6} + \frac{\tau_3(i)}{2} \right].$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle p \uparrow | \widehat{Q} | p \uparrow \rangle &= 3 \frac{1}{6} \langle p \uparrow | p \uparrow \rangle + \frac{3}{2} \langle p \uparrow | \tau_3(3) | p \uparrow \rangle \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1,\end{aligned}$$

denn

$$\langle p \uparrow | \tau_3(3) | p \uparrow \rangle = \frac{1}{18} [4(-1+1+1) + (-1-1+1+1+1+1)] = \frac{1}{18}(4+2) = \frac{1}{3}.$$

**Anwendung 5.3.6** Das magnetische Moment eines Protons ist im nicht-relativistischen Quarkmodell gegeben durch das Matrixelement

$$\begin{aligned}\mu_p &= \langle p \uparrow | M_z | p \uparrow \rangle \\ &= \langle p \uparrow | \sum_{i=1}^3 \frac{e}{2m} Q(i) \sigma_3(i) | p \uparrow \rangle \\ &= \frac{e}{2m} 3 \langle p \uparrow | Q(3) \sigma_3(3) | p \uparrow \rangle.\end{aligned}$$

Hierbei ist  $e > 0$  die Elementarladung,  $m$  die Masse des  $u$ - und  $d$ -Quarks im nichtrelativistischen Modell,  $Q(i)$  der Ladungsoperator, der auf das  $i$ -te Quark wirkt, und  $\sigma_3(i)$  die Pauli-Matrix, die auf den Spin des  $i$ -ten Quarks wirkt. Verwende den Protonzustand aus Beispiel 5.3.3. Beachte, dass  $Q(3)$  und  $\sigma_3(3)$  diagonal sind, z. B.:

$$\begin{aligned}\langle u \uparrow u \uparrow d \downarrow | Q(3) \sigma_3(3) | u \uparrow u \uparrow d \downarrow \rangle &= -\frac{1}{3}(-1) \underbrace{\langle u \uparrow u \uparrow d \downarrow | u \uparrow u \uparrow d \downarrow \rangle}_1 \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle p \uparrow | Q(3) \sigma_3(3) | p \uparrow \rangle &= \frac{1}{18} \left[ 4 \left( -\frac{1}{3}(-1) + \frac{2}{3}(+1) + \frac{2}{3}(+1) \right) \right. \\ &\quad + \left( -\frac{1}{3}(+1) + \left( -\frac{1}{3} \right) (+1) + \frac{2}{3}(-1) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{3}(-1) + \frac{2}{3}(+1) + \frac{2}{3}(+1) \right) \right] \\ &= \frac{1}{18} \left( 4 \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für das magnetische Moment des Protons

$$\mu_p = \frac{e}{2m} 3 \frac{1}{3} = \frac{e}{2m} \left( = 3 \frac{e}{2(3m)} \right).$$

Weitere Beispiele siehe Übung 18, Aufgaben 2 – 4.

## 5.4 SU(3)

**5.4.1 The Eightfold Way** (Gell-Mann und Ne'eman, 1961). Betrachte Gruppierungen von stark wechselwirkenden Teilchen mit ähnlichen Massen und denselben „Raum-Zeit-Eigenschaften“, d. h. Spin  $J$  und Transformationsverhalten bzgl. Parität,  $P = \pm 1$ . Organisation bzgl. Hyperladung  $Y$ ,

$$Y = B + S, \quad B : \text{Baryonenzahl}, \quad S : \text{Strangeness}$$

und Isospinprojektion  $I_3$ , wobei

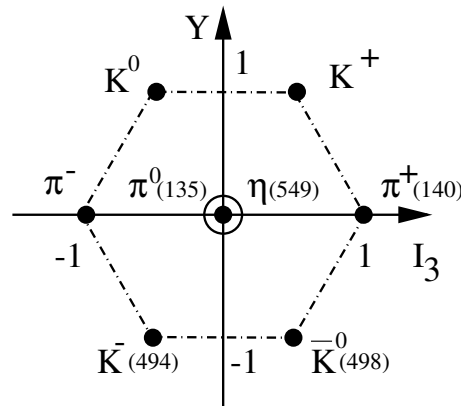
$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}, \quad \text{Gell-Mann-Nishijima-Relation.}$$

Typischer Eintrag in *Review of Particle Properties:  $I^G(J^{PC})$* , wobei  $G$ -Konjugation das Produkt aus einer „Drehung“ mit  $-\pi$  bzgl. der 2-Achse und Ladungskonjugation ist:

$$G = C \exp(i\pi I_2).$$

Ladungskonjugation transformiert einen Teilchenzustand in den zugehörigen Antiteilchenzustand. Der Eigenwert zu  $G$  wird als  $G$ -Parität bezeichnet (siehe Übung 18, Aufgabe 5).

Betrachte das pseudoskalare Mesonoktett:



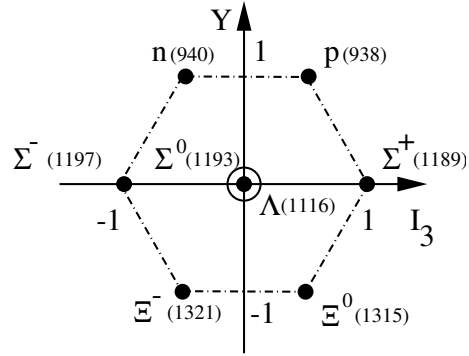
$$Y=B+S, \quad B=0$$

Massen in Klammern in MeV.

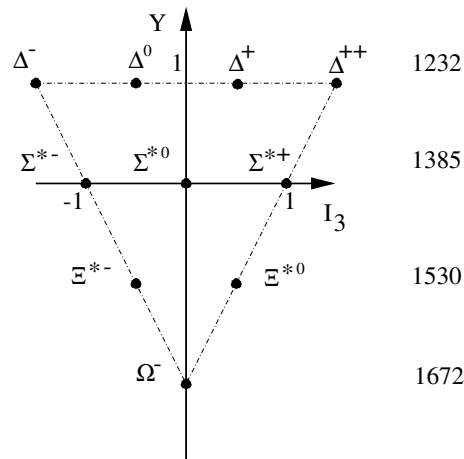
$$\begin{aligned} \pi^0 : & \quad 1^-(0^{-+}) \\ \pi^\pm : & \quad 1^-(0^{-}) \\ \eta : & \quad 0^+(0^{-+}) \\ K^\pm : & \quad \frac{1}{2}(0^{-}) \\ K^0 (\bar{K}^0) : & \quad \frac{1}{2}(0^{-}) \end{aligned}$$

Interpretation: Es handelt sich um zusammengesetzte Zustände (Gell-Mann, Zweig 1964), die zu einem Multiplett irreduzibler Darstellungen von  $SU(3)$  passen.

Weitere Multipletts



$Y=B+S, B=1$   
Baryonoktett mit  $J = \frac{1}{2}$



$Y=B+S, B=1$   
Baryondekuplett mit  $J = \frac{3}{2}$

**5.4.2 Lie-Algebra  $su(3)$  und Gell-Mann-Matrizen** Gegeben sei  $U \in SU(3) := \{A \in GL(3, \mathbb{C}) | A^\dagger A = AA^\dagger = \mathbb{1}_{3 \times 3}, \det(A) = 1\}$ . Es ist üblich,  $U$  mit Hilfe der acht linear unabhängigen Gell-Mann-Matrizen zu parametrisieren ( $U = \exp(B)$ ,  $B \in su(3)$ ; siehe Sätze 3.4.2 und 3.4.3):

$$U = U(\Theta_1, \dots, \Theta_8) = \exp\left(-i\Theta_a \frac{\lambda_a}{2}\right), \quad \Theta_a \in \mathbb{R},$$

$$\frac{\lambda_a}{2} = i \frac{\partial U}{\partial \Theta_a}(0, \dots, 0), \quad \lambda_a^\dagger = \lambda_a, \quad \text{Tr}(\lambda_a) = 0, \quad \text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}.$$

Wenn wir  $B_a := -i\frac{\lambda_a}{2}$  setzen, dann bildet  $\{B_a\}$  eine Basis der reellen Lie-Algebra  $su(3)$ :

$$su(3) := \{B \in gl(3, \mathbb{C}) | B^\dagger = -B, \text{Tr}(B) = 0\} = \{\Theta_a B_a | \Theta_a \in \mathbb{R}\}.$$



Die Gell-Mann-Matrizen erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$\left[ \frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = if_{abc} \frac{\lambda_c}{2},$$

wobei die Strukturkonstanten durch das folgende Schema charakterisiert werden können:

$abc$	123	147	156	246	257	345	367	458	678
$f_{abc}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Die Strukturkonstanten sind antisymmetrisch bzgl. Vertauschung zweier Indizes. In der Tabelle nicht vorkommende Strukturkonstanten sind Null.

Die Antivertauschungsrelationen lauten

$$\{\lambda_a, \lambda_b\} = \frac{4}{3}\delta_{ab}\mathbb{1}_{3\times 3} + 2d_{abc}\lambda_c,$$

wobei die  $d_{abc}$  vollständig symmetrisch sind:

$abc$	118	146	157	228	247	256	338	344
$d_{abc}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$
$abc$	355	366	377	448	558	668	778	888
$d_{abc}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Konkrete Darstellung:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Definition 5.4.3** Als **Cartan-Algebra** (von  $\mathfrak{su}(3)$ ) bezeichnet man die größte kommutative Lie-Unteralgebra (von  $\mathfrak{su}(3)$ ). Sie ist zweidimensional, deshalb existieren zwei miteinander vertauschbare Basismatrizen  $\lambda_3$  und  $\lambda_8$  [ $(N-1)$ -dimensional für  $\mathfrak{su}(N)$ ].

Wir führen das so genannte  $s$ -Quark ein unter der Annahme, dass die starke Wechselwirkung invariant bzgl. (Flavor-)  $SU(3)$ -Transformationen ist.

**5.4.4 Fundamentaldarstellung 3 und dazu konjugierte Darstellung 3\***. Es sei  $X$  ein komplexer dreidimensionaler Hilbert-Raum mit der ONB

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die wir als  $u$ -,  $d$ - und  $s$ -Quarkzustände interpretieren. Wir verzichten hier auf eine Tensorschreibweise mit oberen und unteren Spinoren. Für die Fundamentaldarstellung  $\varphi_f : \text{SU}(3) \rightarrow \text{GL}(X)$  mit  $\varphi_f(U) := U$  gilt

$$X \ni q = \begin{pmatrix} \Psi_u \\ \Psi_d \\ \Psi_s \end{pmatrix}, \quad q \mapsto q' = Uq \quad \text{mit} \quad U \in \text{SU}(3).$$

Die  $\chi_i$  sind Eigenzustände zu

$$I_{3f} = \Psi_f(iB_3) = \frac{1}{2}\lambda_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y_f = \Psi_f\left(i\frac{2B_8}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

die wir als Operatoren der Fundamentaldarstellung  $\Psi_f : \text{su}(3) \rightarrow \text{gl}(X)$ ,  $\Psi_f(B) := B$  für alle  $B \in \text{su}(3)$  interpretieren. Die Eigenwerte auf den Diagonalen bezeichnen die Isospinprojektionen  $I_3$  und die so genannte Hyperladung  $Y$  der Quarks.

Die komplex konjugierte Darstellung  $\text{SU}(3) \ni U \mapsto U^* : X^* \rightarrow X^*$  wirkt auf dem dualen Raum  $X^*$ . Wir schreiben die duale Basis in der Form

$$\chi_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{u}, \quad \chi_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{d}, \quad \chi_3^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{s},$$

die wir als  $\bar{u}$ -,  $\bar{d}$ - und  $\bar{s}$ -Antiquarkzustände interpretieren. Ein beliebiger Antiquarkzustand lautet dann

$$\phi^* = \phi_{\bar{u}}\chi_1^* + \phi_{\bar{d}}\chi_2^* + \phi_{\bar{s}}\chi_3^* = \begin{pmatrix} \phi_{\bar{u}} \\ \phi_{\bar{d}} \\ \phi_{\bar{s}} \end{pmatrix}$$

und transformiert laut

$$\phi^* \mapsto U^*\phi^*.$$

Die zur Fundamentaldarstellung duale Darstellung  $\Psi_{df} : \text{su}(3) \rightarrow \text{gl}(X^*)$  erhält man durch (siehe Übung 19, Aufgabe 5)

$$\Psi_{df}(B) := -B^T \quad \forall B \in \text{su}(3).$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}
 I_{3df} &= \Psi_{df}(iB_3) = i\Psi_{df}(B_3) = i(-)\Psi_f^T(B_3) = -\frac{1}{2}\lambda_3^T = -\frac{1}{2}\lambda_3 \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 Y_{df} &= \Psi_{df}\left(i\frac{2B_8}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2i}{\sqrt{3}}\Psi_f^T(B_8) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8^T = -\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte auf den Diagonalen bezeichnen die Isospinprojektionen  $I_3$  und die Hyperladung  $Y$  der Antiquarks.

Salopp zusammengefasst verwenden wir für die Fundamentaldarstellung die Matrizen

$$\frac{\lambda_a}{2}$$

und für die dazu duale Darstellung

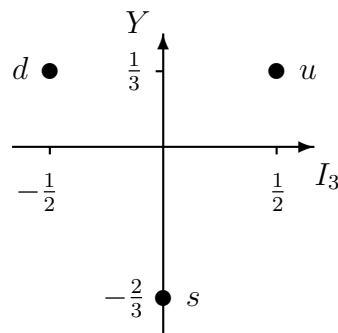
$$-\frac{\lambda_a^T}{2}.$$

**Definition 5.4.5** Für eine beliebige Darstellung  $\Psi$  heißen die Eigenwertpaare  $(I_3, Y)$  die Gewichte von  $\Psi$ .

**Definition 5.4.6** Ein Gewichtsdiagramm einer Darstellung ist eine graphische Darstellung der Gewichte in einem  $(I_3, Y)$ -Koordinatensystem. Äquivalente Darstellungen besitzen die gleichen Gewichtsdiagramme.

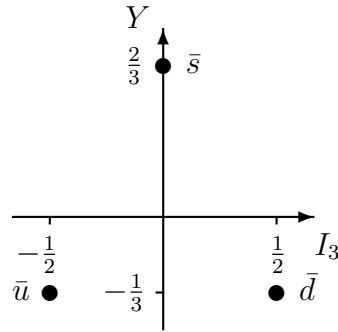
**Beispiel 5.4.7** Die Gewichtsdiagramme des Quark- und Antiquarktripletts sind durch Spiegelung am Ursprung miteinander verknüpft.

Quarktriplett



$$Y = B + S, \quad B = \frac{1}{3}.$$

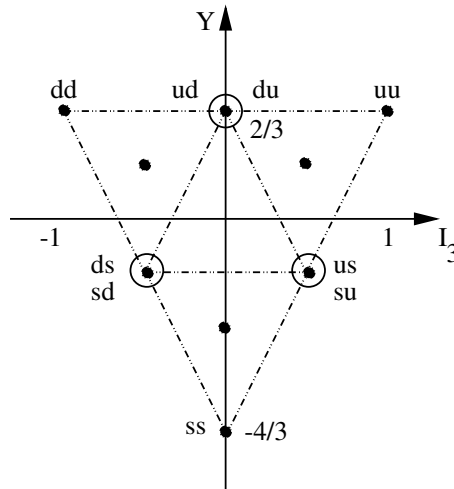
Antiquarktriplett



$$Y = B + S, \quad B = -\frac{1}{3}.$$

**5.4.8 Graphische Konstruktion.** Ähnlich wie für  $SU(2)$  lassen sich Produktdarstellungen aus der Fundamentaldarstellung  $3$  und der konjugierten Darstellung  $3^*$  durch Überlagerung der Multipletts bilden. Wegen der Additivität der Quantenzahlen  $Y$  und  $I_3$  muss man dazu das erste Multiplett jeweils mit dem Punkt  $(I_3, Y) = (0, 0)$  über jeden einzelnen Punkt des zweiten Multipletts legen und erhält damit die entsprechenden zusammengesetzten Zustände.

1. Ausgedrückt durch die Dimensionalitäten gilt  $3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*$  (manchmal auch  $\bar{3}$  anstelle  $3^*$ ):

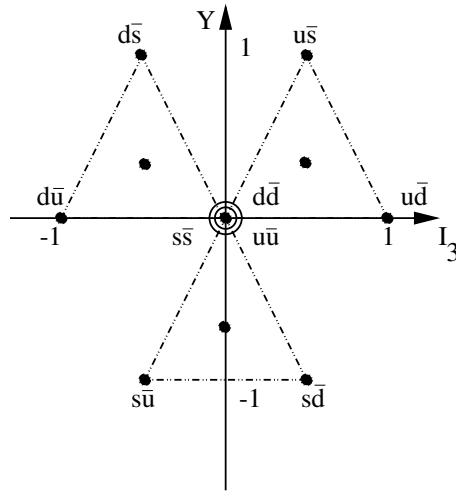


2. Anmerkung: Die Gewichtsdiagramme irreduzibler Darstellungen  $(\alpha, \beta)$  besitzen die folgende Eigenschaft. Die Punkte am Rand sind einfach besetzt. In der nächst inneren Schicht sind die Punkte zweifach besetzt, usw.

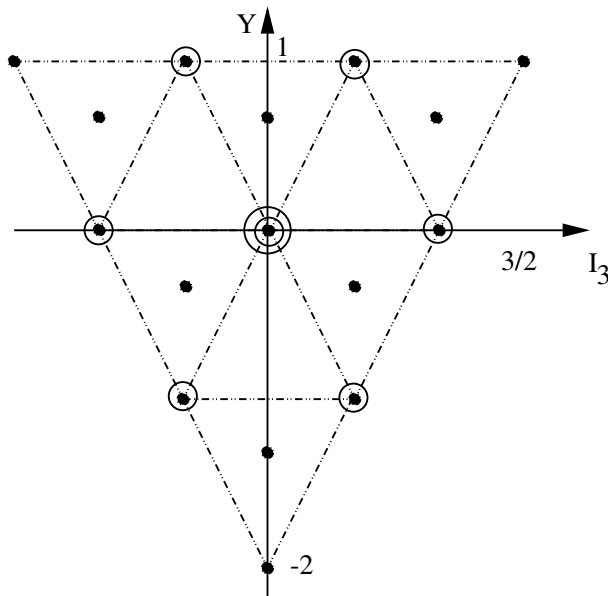
- (a) Für  $\alpha = \beta$  endet das Verfahren im Ursprung, der  $(\alpha + 1)$ -fach besetzt ist.

(b) Für  $\alpha \neq \beta$  bricht das Verfahren ab, sobald eine Dreiecksform erreicht ist. Für  $\alpha > \beta$  sind die Punkte des Dreiecks (Rand und Inneres) jeweils  $(\beta + 1)$ -fach besetzt [ $(\alpha + 1)$ -fach für  $\beta > \alpha$ ].

3.  $3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$



4.  $6 \otimes 3 = 10 \oplus 8$  (siehe Übung 19, Aufgabe 5)



5.  $3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \oplus 3^*) \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$  (siehe Übung 19, Aufgabe 5)

**5.4.9 T-, U- und V-Spin.** Es sei  $F_a := \lambda_a/2$ , wobei  $\lambda_a$  ( $a = 1, \dots, 8$ ) die Gell-Mann-Matrizen sind. Wir definieren

$$\begin{aligned} T_3 &= F_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_+ &= F_1 + iF_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_- &= F_1 - iF_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir schreiben  $T_{3f}$  anstelle von  $\Psi_f(F_3)$  und  $|u\rangle$  für  $\chi_1$  usw. In der Fundamentaldarstellung sind die Quarks Eigenzustände zu  $T_{3f}$  mit

$$\begin{aligned} T_{3f}|u\rangle &= \frac{1}{2}|u\rangle, \\ T_{3f}|d\rangle &= -\frac{1}{2}|d\rangle, \\ T_{3f}|s\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Die Operatoren  $T_{\pm f}$  wirken laut

$$\begin{aligned} T_{+f}|u\rangle &= 0, \\ T_{+f}|d\rangle &= |u\rangle, \\ T_{+f}|s\rangle &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} T_{-f}|u\rangle &= |d\rangle, \\ T_{-f}|d\rangle &= 0, \\ T_{-f}|s\rangle &= 0. \end{aligned}$$

In einem  $(T_3, Y)$ -Diagramm verschieben die (Darstellungen der) Operatoren  $T_{\pm}$  parallel zur  $T_3$ -Achse und vernichten die Zustände an den entsprechenden äußeren Enden.

Den Hyperladungoperator haben wir schon kennengelernt

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} Y_f|u\rangle &= \frac{1}{3}|u\rangle, \\ Y_f|d\rangle &= \frac{1}{3}|d\rangle, \\ Y_f|s\rangle &= -\frac{2}{3}|s\rangle. \end{aligned}$$

Des Weiteren definieren wir

$$U_+ = F_6 + iF_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_- = F_6 - iF_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit der Wirkung in der Fundamentaldarstellung

$$U_{+f}|u\rangle = 0,$$

$$U_{+f}|d\rangle = 0,$$

$$U_{+f}|s\rangle = |d\rangle$$

und

$$U_{-f}|u\rangle = 0,$$

$$U_{-f}|d\rangle = |s\rangle,$$

$$U_{-f}|s\rangle = 0.$$

Schließlich betrachten wir noch

$$V_+ = F_4 + iF_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_- = F_4 - iF_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit der Wirkung in der Fundamentaldarstellung

$$V_{+f}|u\rangle = 0,$$

$$V_{+f}|d\rangle = 0,$$

$$V_{+f}|s\rangle = |u\rangle$$

und

$$V_{-f}|u\rangle = |s\rangle,$$

$$V_{-f}|d\rangle = 0,$$

$$V_{-f}|s\rangle = 0.$$

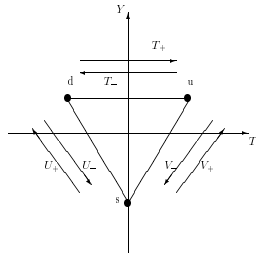
Der Vollständigkeit halber definieren wir noch

$$U_3 = \frac{3}{4}Y - \frac{1}{2}T_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$V_3 = \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}T_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

wobei die Eigenwerte der Quarks jeweils wieder auf der Diagonalen stehen. In einem  $(T_3, Y)$ -Diagramm, in dem die  $Y$ -Achse im Vergleich zur  $T_3$ -Achse um den Faktor  $\sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2 \approx 0.87$  skaliert ist, verschieben die Operatoren  $T_\pm$  parallel zur  $T_3$ -Achse, die Operatoren  $V_\pm$  und  $U_\pm$  parallel zu Achsen, die durch Drehungen um  $60^\circ$  und  $120^\circ$  um den Ursprung aus der  $T_3$ -Achse hervorgehen.

Wirkung der  $T$ -,  $U$ - und  $V$ -Spin-Operatoren in der Fundamentaldarstellung:



Schematische Darstellung der Wirkung der  $T$ -,  $U$ - und  $V$ -Spin-Operatoren in einer beliebigen Darstellung:





Wegen der  $SU(2)$ -Vertauschungsrelationen spricht man auch vom  $T$ -,  $U$ - und  $V$ -Spin (siehe Übung 19, Aufgabe 8).

Für die duale Darstellung zur Beschreibung der Antiquarks definieren wir analog

$$\begin{aligned}
 T_{3df} &= \Psi_{df}(F_3) = -\frac{\lambda_3^T}{2} = -\frac{\lambda_3}{2}, \\
 T_{\pm df} &= \Psi_{df}(F_1 \pm iF_2) = \Psi_{df}(F_1) \pm i\Psi_{df}(F_2) \\
 &= -\frac{\lambda_1^T}{2} \pm i\left(\frac{-\lambda_2^T}{2}\right) = -\frac{\lambda_1}{2} \pm i\frac{\lambda_2}{2} \\
 &= \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \\
 &\text{usw.}
 \end{aligned}$$

Die Matrizen der dualen Darstellung ergeben sich demnach aus denjenigen der Fundamentaldarstellung durch Transposition und Multiplikation mit einem Gesamtvorzeichen.

Die Wirkung auf die Antiquarkzustände

$$|\bar{u}\rangle = \chi_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\bar{d}\rangle = \chi_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\bar{s}\rangle = \chi_3^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

lautet

$$\begin{aligned}
T_{3df}|\bar{u}\rangle &= -\frac{1}{2}|\bar{u}\rangle, \\
T_{3df}|\bar{d}\rangle &= \frac{1}{2}|\bar{d}\rangle, \\
T_{3df}|\bar{s}\rangle &= 0, \\
T_{+df}|\bar{u}\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -|\bar{d}\rangle, \\
T_{+df}|\bar{d}\rangle &= 0, \\
T_{+df}|\bar{s}\rangle &= 0, \\
T_{-df}|\bar{u}\rangle &= 0, \\
T_{-df}|\bar{d}\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -|\bar{u}\rangle, \\
T_{-df}|\bar{s}\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Der Rest wird in Übung 20, Aufgabe 1 bestimmt.

Vorsicht: Mit der obigen Vorzeichenkonvention erfüllen die Antiquarkzustände nicht die Condon-Shortley-Konvention.

## 5.5 SU(N)-Multipletts und Young-Diagramme

1. Ein Multiplett ist eine ONB des Trägerraums einer irreduziblen Darstellung von  $SU(N)$ .
2. Ist der Hamilton-Operator invariant bzgl.  $SU(N)$ ,  $[H_0, U] = 0$ , dann sind die Zustände eines Multipletts Eigenzustände zu  $H_0$  mit demselben Eigenwert (Voraussetzung: keine spontane Symmetriebrechung).

**5.5.1 Bezeichnung von SU(N)-Multipletts.** Ein  $SU(N)$ -Multiplett ist eindeutig durch ein  $(N - 1)$ -Tupel  $(\alpha, \beta, \dots)$  mit Komponenten in  $\mathbb{N}_0$  bestimmt.

Geometrische Deutung für  $SU(2)$  und  $SU(3)$ :

- Für ein  $SU(2)$ -Multiplett bezeichnet  $\alpha$  die Anzahl der Schritte vom einen zum anderen Ende des Multipletts. Anzahl der Zustände in einem Multiplett  $N(\alpha) = \alpha + 1$ .
- Für  $SU(3)$  bezeichnen  $\alpha$  und  $\beta$  die Anzahl der Schritte in horizontaler Richtung am oberen und am unteren Ende des Multiplett-Diagramms.

Beispiele:

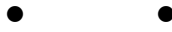
1. Triplet (1,0):



2. Konjugiertes Triplet (0,1):



3. Oktett (1,1):



4. Dekuplett (3,0):



- $SU(N)$ -Singulett:  $(0, 0, \dots)$ .
- In einer Flavor- $SU(N)$  bilden die  $N$  Quarks das  $(1, 0, 0, \dots)$ -Multipllett und die  $N$  Antiquarks das  $(0, 0, \dots, 1)$ -Multipllett.
- Als konjugierte Multiplletts bezeichnet man  $(\alpha, \beta, \dots) \leftrightarrow (\dots, \beta, \alpha)$ .

**5.5.2 Anzahl von Zuständen.** Für die Anzahl von Zuständen in einem  $SU(N)$ -Multiplett gilt:

$$\begin{aligned}
 SU(2) : \quad N(\alpha) &= \frac{\alpha + 1}{1}, \\
 SU(3) : \quad N(\alpha, \beta) &= \frac{\alpha + 1}{1} \frac{\beta + 1}{1} \frac{\alpha + \beta + 2}{2}, \\
 SU(4) : \quad N(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{\alpha + 1}{1} \frac{\beta + 1}{1} \frac{\gamma + 1}{1} \frac{\alpha + \beta + 2}{2} \frac{\beta + \gamma + 2}{2} \frac{\alpha + \beta + \gamma + 3}{3}, \\
 SU(5) : \quad N(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \frac{\alpha + 1}{1} \frac{\beta + 1}{1} \frac{\gamma + 1}{1} \frac{\delta + 1}{1} \frac{\alpha + \beta + 2}{2} \frac{\beta + \gamma + 2}{2} \frac{\gamma + \delta + 2}{2} \\
 &\quad \times \frac{\alpha + \beta + \gamma + 3}{3} \frac{\beta + \gamma + \delta + 3}{3} \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta + 4}{4}, \\
 \text{usw.}
 \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Es treten nur Sequenzen direkt aufeinanderfolgender Komponenten der  $(N - 1)$ -Tupel auf.
2. Ein Multiplett besitzt dieselbe Anzahl Zustände wie sein konjugiertes Multiplett:  $N(\alpha, \beta, \dots) = N(\dots, \beta, \alpha)$ .

Denn: Invertiere in jedem Block die Reihenfolge der Faktoren und in jedem Faktor die Reihenfolge der Komponenten.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 N(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{\alpha + 1}{1} \frac{\beta + 1}{1} \frac{\gamma + 1}{1} \frac{\alpha + \beta + 2}{2} \frac{\beta + \gamma + 2}{2} \frac{\alpha + \beta + \gamma + 3}{3} \\
 &= \frac{\gamma + 1}{1} \frac{\beta + 1}{1} \frac{\alpha + 1}{1} \frac{\gamma + \beta + 2}{2} \frac{\beta + \alpha + 2}{2} \frac{\gamma + \beta + \alpha + 3}{3} \\
 &= N(\gamma, \beta, \alpha).
 \end{aligned}$$

3. Verschiedene (nicht konjugierte) Multipletts können dieselbe Anzahl Zustände besitzen.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 N(3, 0, 0) &= 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{6}{3} = 20, \\
 N(1, 1, 0) &= 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} = 20.
 \end{aligned}$$

**Definition 5.5.3 Tensordarstellung der Permutationsgruppe  $S_n$**  (siehe Beispiel 1.2.11). Es sei  $X$  ein  $q$ -dimensionaler komplexer Hilbert-Raum mit ONB  $\{e_1, \dots, e_q\}$ . Dann bilden die Vektoren

$$e_{i_1 \dots i_n} := e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}, \quad i_1, \dots, i_n = 1, \dots, q,$$

eine ONB im Tensorprodukt

$$Z := \underbrace{X \otimes \dots \otimes X}_{n \text{ Faktoren}}$$

mit

$$Z \ni z = t^{i_1 \dots i_n} e_{i_1 \dots i_n} \quad (\text{Einstein'sche Summenkonvention}).$$

Jeder Permutation  $\pi \in S_n$ ,

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1' & 2' & \dots & n' \end{pmatrix}, \quad \pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1' & 2' & \dots & n' \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

ordnen wir einen linearen Operator  $\varphi_\pi : Z \rightarrow Z$  zu mit

$$\varphi_\pi(z) = \varphi_\pi(t^{i_1 \dots i_n} e_{i_1 \dots i_n}) := t^{\pi(i_1 \dots i_n)} e_{i_1 \dots i_n} = t^{i_{1'} \dots i_{n'}} e_{i_1 \dots i_n} = t^{i_1 \dots i_n} e_{\pi^{-1}(i_1 \dots i_n)}.$$

$\varphi_\pi$  entspricht der Permutation der Indizes von  $t^{i_1 \dots i_n}$  nach  $t^{i_{1'} \dots i_{n'}}$ .

Vorsicht: Manche Bücher wählen als alternative Konvention eine Permutation der Basisvektoren. Der Unterschied ist analog zur Darstellung von Drehungen als aktive Drehungen („Drehen des Gegenstands“) im Unterschied zu passiven Drehungen („Drehen des Koordinatensystems“).

**Beispiel 5.5.4** •  $n = 3$  zur Beschreibung eines Baryons und

•  $q = 3$  zur Beschreibung des SU(3)-Flavors der drei leichten Quarks.

Es sei

$$\begin{aligned} z_1 &= t_1^{ijk} e_{ijk} \stackrel{!}{=} udu, \quad \text{d. h. } t_1^{121} = 1, \quad t_1^{ijk} = 0 \quad \text{sonst,} \\ z_2 &= t_2^{ijk} e_{ijk} \stackrel{!}{=} uds, \quad \text{d. h. } t_2^{123} = 1, \quad t_2^{ijk} = 0 \quad \text{sonst.} \end{aligned}$$

Betrachte die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Anwendung der Darstellung auf die  $z_i$  ergibt

$$\begin{aligned} \varphi_\pi(udu) &= \varphi_\pi(z_1) = t_1^{kij} e_{ijk} = t_1^{121} e_{211} = duu \\ &= t_1^{ijk} e_{jki} = t_1^{121} e_{211}, \\ \varphi_\pi(uds) &= \varphi_\pi(z_2) = t_2^{kij} e_{ijk} = t_2^{123} e_{231} = dsu \\ &= t_2^{ijk} e_{jki} = t_2^{123} e_{231}. \end{aligned}$$

Anschaulich: Die Quarks aus den Positionen 1, 2 und 3 kommen entsprechend in die Positionen 3, 1 und 2.

Verallgemeinerung für  $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ : Die Quarks aus den Positionen  $1, \dots, n$  kommen entsprechend in die Positionen  $p_1, \dots, p_n$ .

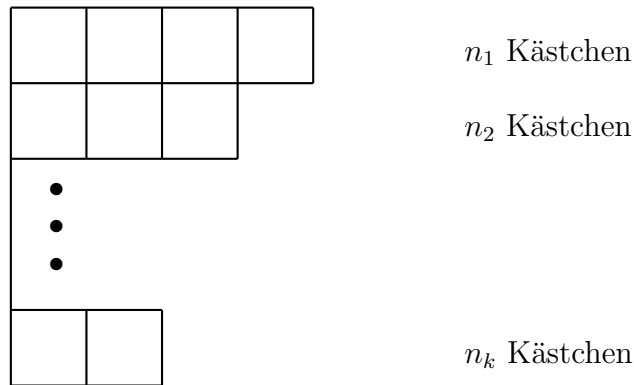
**Definition 5.5.5 Young-Rahmen.** Jeder Zerlegung

$$n = n_1 + \dots + n_k$$

mit natürlichen Zahlen

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 1$$

ordnen wir einen so genannten Young-Rahmen der folgenden Form zu:



**Definition 5.5.6 Standardtableau.** Ein Standardtableau ergibt sich, indem man die Kästchen mit den Zahlen 1 bis  $n$  belegt unter Berücksichtigung folgender Regeln:

1. Es dürfen keine Wiederholungen auftreten.
2. Die Nummerierung wächst in den Zeilen von links nach rechts und in den Spalten von oben nach unten.

Als **Gewicht**  $g$  eines Young-Rahmens bezeichnet man die Anzahl der zugehörigen Standardtableaus.

**Beispiele 5.5.7** 1.  $n = 2$ : Young-Rahmen

$$2 = 1 + 1 : \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array},$$

$$2 = 2 : \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array},$$

mit Standardtableaus

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \quad g = 1,$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \quad g = 1.$$

2.  $n = 3$ : Young-Rahmen

$$\begin{aligned}
 3 = 1 + 1 + 1 : & \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \\
 3 = 2 + 1 : & \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}, \\
 3 = 3 : & \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array},
 \end{aligned}$$

mit Standardtableaus

$$\begin{aligned}
 & \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \quad g = 1, \\
 & \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \quad g = 2, \\
 & \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \quad g = 1.
 \end{aligned}$$

3.  $n = 4$ : Übung 20, Aufgabe 2.

**Definition 5.5.8 Young-Operatoren oder Projektionsoperatoren auf  $Z := X \otimes \dots \otimes X$  ( $n$  Faktoren).**

Mit  $T_1, \dots, T_M$  bezeichnen wir die Standardtableaus. Betrachte für ein gegebenes Standardtableau  $T_j$  die Wirkung aller Permutationen aus  $S_n$  auf das Standardtableau und sortiere die Permutationen nach folgender Eigenschaft:

- Die Menge  $H_j$  (für horizontal) besteht aus allen Permutationen, bei denen jede Zeile des neuen Tableaus eine Permutation derselben Zeile des ursprünglichen Standardtableaus ist.
- Die Menge  $V_j$  (für vertikal) besteht aus allen Permutationen, bei denen jede Spalte des neuen Tableaus eine Permutation derselben Spalte des ursprünglichen Standardtableaus ist.

Für eine gegebene Permutation  $\pi$  und ein gegebenes Standardtableau  $T_j$  sind folgende Möglichkeiten denkbar:

1.  $(\pi \in H_j) \wedge (\pi \in V_j)$ ,
2.  $(\pi \in H_j) \wedge (\pi \notin V_j)$ ,
3.  $(\pi \notin H_j) \wedge (\pi \in V_j)$ ,
4.  $(\pi \notin H_j) \wedge (\pi \notin V_j)$ .

Illustration (siehe auch Übung 20, Aufgabe 4). Betrachte

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\ \pi_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \\ \pi_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ \pi_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ \dots &\end{aligned}$$

und

$$T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}.$$

Es gilt

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\pi_1} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \Rightarrow (\pi_1 \in H_2) \wedge (\pi_1 \in V_2),$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\pi_2} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \Rightarrow (\pi_2 \in H_2) \wedge (\pi_2 \notin V_2),$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\pi_3} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \Rightarrow (\pi_3 \notin H_2) \wedge (\pi_3 \in V_2),$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\pi_4} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \Rightarrow (\pi_4 \notin H_2) \wedge (\pi_4 \notin V_2).$$

Jedem  $T_j$  ordnen wir einen Young-Operator

$$P_j := \frac{g_j}{n!} \left( \sum_{\pi \in V_j} \text{sgn}(\pi) \varphi_\pi \right) \left( \sum_{\pi \in H_j} \varphi_\pi \right)$$

zu. Jeder Operator  $P_j : Z \rightarrow Z$  ist ein Projektionsoperator, d. h.  $P_j^2 = P_j$ .

**Beispiel 5.5.9** Es sei  $n = 2$ , d. h.

$$T_1 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \quad g_1 = 1,$$

$$T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \quad g_2 = 1.$$

$S_2$  enthält  $e$  und  $\pi = (12)$ .



Wir betrachten die Wirkung auf  $T_1$ :

$$\begin{array}{c} \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{array} \xrightarrow{e} \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{array},$$

$$\begin{array}{c} \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{array} \xrightarrow{\pi} \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \boxed{1} \end{array}.$$

Beachte: Es gilt immer  $e \in V_j$  und  $e \in H_j$ .

$\pi \in V_1. \Rightarrow$

$$P_1 = \frac{1}{2!}(I - \varphi_\pi)I = \frac{1}{2}(I - \varphi_\pi).$$

Betrachte die Wirkung auf  $T_2$ :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{e} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\pi} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

$\pi \in H_2. \Rightarrow$

$$P_2 = \frac{1}{2!}I(I + \varphi_\pi) = \frac{1}{2}(I + \varphi_\pi).$$

Beachte:

1.  $P_1 + P_2 = I$ .
2. Da  $\varphi_\pi^2 = I$ , gilt

$$\begin{aligned} P_1^2 &= \frac{1}{4}(I - \varphi_\pi)(I - \varphi_\pi) = \frac{1}{2}(I - \varphi_\pi) = P_1, \\ P_2^2 &= \frac{1}{4}(I + \varphi_\pi)(I + \varphi_\pi) = \frac{1}{2}(I + \varphi_\pi) = P_2, \\ P_1P_2 &= \frac{1}{4}(I - \varphi_\pi)(I + \varphi_\pi) = 0, \end{aligned}$$

d. h.  $P_1$  und  $P_2$  sind Projektionsoperatoren. Wir erhalten folgende Zerlegung des Tensorprodukts:

$$Z = P_1(Z) \oplus P_2(Z).$$

Da

$$\begin{aligned} \varphi_e(z) = I(z) &= t^{ij}e_i \otimes e_j, \\ \varphi_\pi(z) &= t^{ji}e_i \otimes e_j, \end{aligned}$$

entspricht dies der Zerlegung eines  $z \in Z$  in

$$t^{ij}e_i \otimes e_j = \underbrace{\frac{1}{2}(t^{ij} - t^{ji})}_{\text{antisymmetrisch}} e_i \otimes e_j + \underbrace{\frac{1}{2}(t^{ij} + t^{ji})}_{\text{symmetrisch}} e_i \otimes e_j.$$

**5.5.10** Wir betrachten die Lie-Gruppen  $GL(q, \mathbb{C})$ ,  $SL(q, \mathbb{C})$  und  $SU(q)$  und die Lie-Algebren  $\mathfrak{gl}(q, \mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{sl}(q, \mathbb{C})$  und  $\mathfrak{su}(q)$ . In der Fundamentaldarstellung wirken diese auf den  $q$ -dimensionalen Hilbert-Raum  $X = LH\{e_1, \dots, e_q\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_q\}$  in der Form

$$\left. \begin{array}{l} G \ni A = (a_{ij}) \\ \mathcal{L} \ni A = (a_{ij}) \end{array} \right\} : A(t^j e_j) = e_i A^i_j t^j \text{ mit } A^i_j = a_{ij}.$$

Für das  $n$ -fache Tensorprodukt  $Z = X \otimes \dots \otimes X$  lauten die Produktdarstellungen

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow GL(Z), & \varphi(A)(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}) &:= A e_{i_1} \otimes \dots \otimes A e_{i_n}, \quad \forall A \in G, \\ \psi : \mathcal{L} &\rightarrow \mathfrak{gl}(Z), & \psi(A)(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}) &:= \sum_{j=1}^n e_{i_1} \otimes \dots \otimes A e_{i_j} \otimes \dots \otimes e_{i_n}, \\ & & & \forall A \in \mathcal{L}, \end{aligned}$$

wobei  $\varphi(A)$  und  $\psi(A)$  komplexe  $(q^n, q^n)$ -Matrizen sind.

Beispiel  $SU(2)$ : In der Physik benutzen wir Spinoren  $\chi_m$  mit

$$\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} SU(2) \ni U &= \exp\left(-i \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}}{2}\right) = \mathbb{1} + u + \mathcal{O}(u^2) \quad \text{mit} \\ u &= -i \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}}{2} \in \mathfrak{su}(2). \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} \varphi(U)(\chi_{m_1} \otimes \dots \otimes \chi_{m_n}) &= U \chi_{m_1} \otimes \dots \otimes U \chi_{m_n} \\ &= (\mathbb{1} + u + \dots) \chi_{m_1} \otimes \dots \otimes (\mathbb{1} + u + \dots) \chi_{m_n} \\ &= \chi_{m_1} \otimes \dots \otimes \chi_{m_n} \\ &\quad + \underbrace{u \chi_{m_1} \otimes \dots \otimes \chi_{m_n} + \dots + \chi_{m_1} \otimes \dots \otimes u \chi_{m_n}}_{\Psi(u)(\chi_{m_1} \otimes \dots \otimes \chi_{m_n})} \\ &+ \mathcal{O}(u^2). \end{aligned}$$

**Satz 5.5.11** (ohne Beweis).  $Z$  lässt sich in eine direkte Summe zerlegen

$$Z = \bigoplus_{j=1}^M P_j(Z).$$

Jeder der linearen Teilräume  $P_j(Z)$  ist irreduzibel bzgl. der Produktdarstellung  $\varphi$  der oben genannten Lie-Gruppen (Produktdarstellung  $\psi$  der oben genannten Lie-Algebren).

Als Illustration siehe Übung 20, Aufgabe 4.

Fazit: Irreduzible Darstellungen werden mittels der Frage nach den Symmetrieeigenschaften von Zuständen des Tensorproduktraumes unter Vertauschung von Indizes konstruiert.

### 5.5.12 Zusammenhang zwischen Young-Diagrammen und SU(N)-Multipletts.

(Ein Young-Diagramm repräsentiert eine bestimmte Prozedur, einen vorgegebenen SU(N)-Tensor (siehe 5.2.5) zu symmetrisieren und antisymmetrisieren mit dem Resultat, dass ein Tensor entsteht, der sich gemäß einer irreduziblen Darstellung von SU(N) transformiert; siehe 5.5.11).

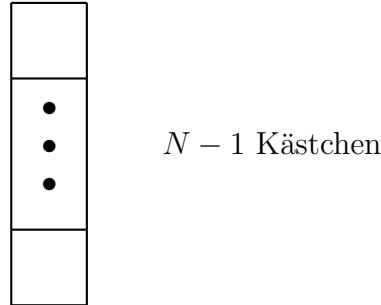
Ein Young-Diagramm ist eine Anordnung von Kästchen in linksjustierten Zeilen, wobei jede Zeile mindestens so lang wie die darunterliegende ist.

- Zusammenhang mit SU(N)-Multipletts:
  1. Die erste Zeile ist um  $\alpha$  Kästchen länger als die 2. Zeile.
  2. Die zweite Zeile ist um  $\beta$  Kästchen länger als die 3. Zeile, usw.
  3. Ein SU(N)-Young-Diagramm hat maximal  $N$  Zeilen (Die Spalten eines Diagramms repräsentieren antisymmetrisierte Indizes. Für SU(N) können die Indizes die Werte  $1, \dots, N$  annehmen und damit höchstens  $N$  Indizes antisymmetrisiert werden).
  4. Vollständige Spalten mit  $N$  Kästchen am linken Rand eines Young-Diagramms können, solange noch etwas übrig bleibt, gestrichen werden, d. h. sie haben keine Bedeutung für die Kennzeichnung eines SU(N)-Multipletts.
- Beispiele für SU(3):

$$\begin{array}{l}
 \square = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} = (1, 0), \\
 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} = (0, 1), \\
 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = (0, 0), \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} = (1, 1), \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \end{array} = (3, 0).
 \end{array}$$

Hierbei sollte man sich im Zweifelsfall am linken Rand eine vollständige Spalte mit drei Kästchen (für  $SU(3)$ ) hinzudenken.

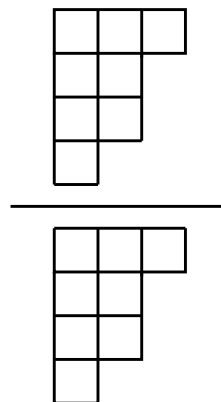
- In jeder  $SU(N)$  wird das Quark-Multiplett  $(1, 0, \dots)$  durch  $\square$  und das Antiquark-Multiplett  $(0, \dots, 1)$  durch



repräsentiert.

**5.5.13** Regeln für die graphische Bestimmung der Dimension eines durch ein Young-Diagramm dargestellten  $SU(N)$ -Multipletts.

1. Zeichne den formalen Quotienten aus zwei Kopien des Diagramms.



2. Zähler: Beginne in der ersten Zeile links mit  $N$  und erhöhe bei jedem Schritt nach rechts um 1. Beginne zweite Zeile mit  $N - 1$  und erhöhe bei jedem Schritt nach rechts um 1, usw.

$N$	$N + 1$	$N + 2$
$N - 1$	$N$	
$N - 2$	$N - 1$	
$N - 3$		

Bilde das Produkt der Einträge.

3. Nenner: Für ein gegebenes Kästchen sei  $n_r$  die Anzahl der Kästchen rechts davon in derselben Zeile und  $n_u$  die Anzahl der Kästchen darunter in derselben Spalte. Trage  $n_r + n_u + 1$  ein und bilde das Produkt aller Einträge.

6	4	1
4	2	
3	1	
1		

4. Bilde den Quotienten:

$$\frac{(N + 2)(N + 1)N^2(N - 1)^2(N - 2)(N - 3)}{6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}.$$

Beachte: Nur ungleich Null für  $N \geq 4$ .

$N = 4$  :

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2}{6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 15.$$

Alternativ:

$$N(1, 0, 1) = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} = 15.$$

5. Häufig auftretende Beispiele (für  $n = 3$ ):

•

--	--	--

(a) SU(2):  $\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$

(b) SU(3):  $\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

(c) SU(6):  $\frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$

•

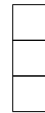


(a) SU(2):  $\frac{2 \cdot 3 \cdot 1}{3 \cdot 1 \cdot 1} = 2$

(b) SU(3):  $\frac{3 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 1 \cdot 1} = 8$

(c) SU(6):  $\frac{6 \cdot 7 \cdot 5}{3 \cdot 1 \cdot 1} = 70$

•



(a) SU(2):  $\frac{2 \cdot 1 \cdot 0}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 0,$

d. h. dieses Multiplett existiert in SU(2) nicht.

(b) SU(3):  $\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$

(c) SU(6):  $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$

**5.5.14 Kopplung von Multipletts.** Mehrere Multipletts lassen sich sequentiell koppeln, indem zuerst Multiplett 1 mit Multiplett 2 gekoppelt wird, anschließend das Resultat mit Multiplett 3 usw. Die Kopplung ist assoziativ.

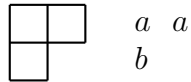
Definition: Eine Folge von Buchstaben  $a, b, c, \dots$  heißt zulässig, wenn an jedem Punkt der Folge  $a$  mindestens genauso häufig aufgetreten ist wie  $b$ ,  $b$  mindestens genauso häufig wie  $c$  usw.

Beispiel:  $abcd, aabcb$  zulässig,  $abb, acb$  nicht zulässig.

Beschreibung des Verfahrens:

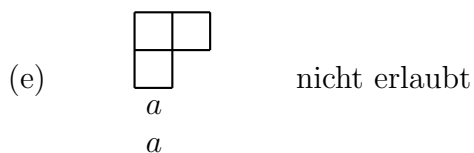
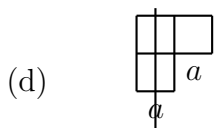
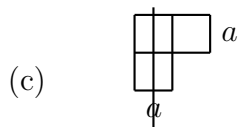
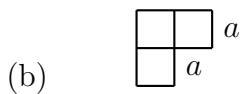
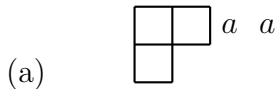
1. Zeichne die Young-Diagramme der beiden Multipletts, wobei im zweiten Diagramm jedes Kästchen der ersten Zeile durch ein  $a$  ersetzt wird, jedes Kästchen der zweiten Zeile durch ein  $b$  usw.

Beispiel: Multipletts, die aus der Kopplung zweier  $SU(3)$ -Multipletts  $(1, 1)$  entstehen (etwa zur Beschreibung der Meson-Meson-, Meson-Baryon-, Baryon-Baryon-Streuung):



Das leere Diagramm bildet in der folgenden Konstruktion die linke obere Ecke.

2. Addiere die  $a$  des zweiten Diagramms zu den rechten Enden der Zeilen des leeren Diagramms. Berücksichtige dabei, dass in einer Spalte ein gegebener Buchstabe, hier  $a$ , maximal einmal auftreten darf. Außerdem können Spalten nicht länger als  $N$  sein:



Komplette Spalten am linken Rand, d. h. Spalten mit  $N$  Kästchen für  $SU(N)$ , können gestrichen werden, solange noch ein Restdiagramm übrig bleibt.

Beispiel in SU(3):

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} : \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2}{4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 15,$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} : \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1} = 15.$$

3. Wiederhole Prozedur mit den  $b$  unter Berücksichtigung derselben Regeln. Jedes Diagramm, das beim Lesen von rechts oben nach links unten nicht zulässige Buchstabenfolgen enthält, wird weggelassen:

(a) Ausgehend von (a)

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} a \ a \ b \quad \text{nicht zulässig}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} a \ a$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} b$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array} a \ a$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \phi$$

(b) Ausgehend von (b)

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} a$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} a \ b$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array} a$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} a$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \phi$$

(c) Ausgehend von (c)

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} a$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} b$$

(d) Ausgehend von (d)



$$\begin{array}{c} \square \\ a \\ b \end{array}$$

Für kompliziertere Multipletts wiederhole die Prozedur für die  $c$ ,  $d$  usw.

4. Sobald alle Buchstaben verteilt sind, werden diese durch Kästchen ersetzt und die resultierenden Diagramme als direkte Summe aufgeführt.
5. Resultat:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

$$(1, 1) \otimes (1, 1) = (2, 2) \oplus (3, 0) \oplus (0, 3) \oplus (1, 1) \oplus (1, 1) \oplus (0, 0).$$

Ausgedrückt durch die Dimensionalitäten der Multipletts:

$$N(\alpha, \beta) = (\alpha + 1)(\beta + 1) \frac{\alpha + \beta + 2}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 8 \otimes 8 &= 3 \cdot 3 \cdot \frac{6}{2} \oplus 4 \cdot 1 \cdot \frac{5}{2} \oplus 1 \cdot 4 \cdot \frac{5}{2} \oplus 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{2} \oplus 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{2} \oplus 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{2} \\ &= 27 \oplus 10 \oplus \overline{10} \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1. \end{aligned}$$

Dabei drückt in  $\overline{10}$  der Strich aus, dass es sich um das zu  $(3, 0)$  konjugierte Multiplett handelt.

Anwendung: In 4.4.4 hatten wir gesehen, dass aus der Invarianz von  $H_{st}$  bzgl. Isospin  $SU(2)$  folgt, dass die  $\pi\pi$ -Streuung durch 3 Amplituden beschrieben wird. Analog folgt jetzt unter der Annahme von Flavor- $SU(3)$ -Invarianz, dass die Oktett-Oktett-Streuung durch 6 Amplituden beschrieben wird.

6. Beispiel in  $SU(6)$  (siehe Übung 21, Aufgabe 1):

$$\square \otimes \square \otimes \square = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

$$\begin{aligned} 6 \otimes 6 \otimes 6 &= \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2} \oplus 2 \frac{6 \cdot 7 \cdot 5}{3} \oplus \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} \\ &= \underbrace{56}_S \oplus \underbrace{70}_{M,S} \oplus \underbrace{70}_{M,A} \oplus \underbrace{20}_A. \end{aligned}$$

Beispiel:

$$56 = \underbrace{10}_{SU(3)\text{-Dekuplett}} \times \underbrace{4}_{\text{Spin } 3/2} + \underbrace{8}_{SU(3)\text{-Oktett}} \times \underbrace{2}_{\text{Spin } 1/2}.$$

Beachte, dass das Spin-3/2-Quadruplett und das SU(3)-Dekuplett jeweils symmetrisch sind. Die restlichen 16 Zustände entstehen analog zu Beispiel 5.3.3 als Produkt

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \underbrace{|\phi_{M,S}\rangle}_{\text{SU(3)-Oktett}} \otimes \underbrace{|\chi_{M,S}\rangle}_{\text{SU(2)-Dublett}} + \underbrace{|\phi_{M,A}\rangle}_{\text{SU(3)-Oktett}} \otimes \underbrace{|\chi_{M,A}\rangle}_{\text{SU(2)-Dublett}} \right)$$

und sind auch vollständig symmetrisch.

**5.5.15 Pentaquarks.** Im Jahr 2003 haben die so genannten Pentaquarks für Furore gesorgt. Auch wenn deren Existenz gegenwärtig wieder sehr umstritten ist, wollen wir kurz den gruppentheoretischen Hintergrund diskutieren.

Unter einem Pentaquark versteht man ein Baryon, dessen Quarkinhalt aus (mindestens) 4 Quarks und einem Antiquark besteht, also symbolisch von der Form  $qqqq\bar{q}$  ist. Unter „exotischen“ Pentaquarks versteht man solche, bei denen das Antiquark einen anderen (Anti-)Flavor als die vier Quarks besitzt, z. B.  $uudd\bar{s}$ . Aus der Kopplung von 4 SU(3)-Quarks und einem Antiquark entsteht u. a. ein Antidekuplett (siehe Figur 5.1 und Übung 21, Aufgabe 2), wobei die Zustände auf den Ecken des Dreiecks „exotische“ Kandidaten sind. Verschiedene Gruppen haben experimentelle Evidenz für das so genannte  $\Theta(1540)^+$  am oberen Ende des Dreiecks berichtet (siehe *Review of Particle Physics*, Particle Data Group, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **33** (2006) 1, hier Abschnitt *Exotic Baryons*, S. 1019).

**Anwendung 5.5.16** Als einfachstes Quarkmodell für  $3q$ -Baryonen betrachten wir einen von Spin und Flavor unabhängigen Hamilton-Operator mit harmonischen Oszillatorpotentialen zwischen den einzelnen Quarks:

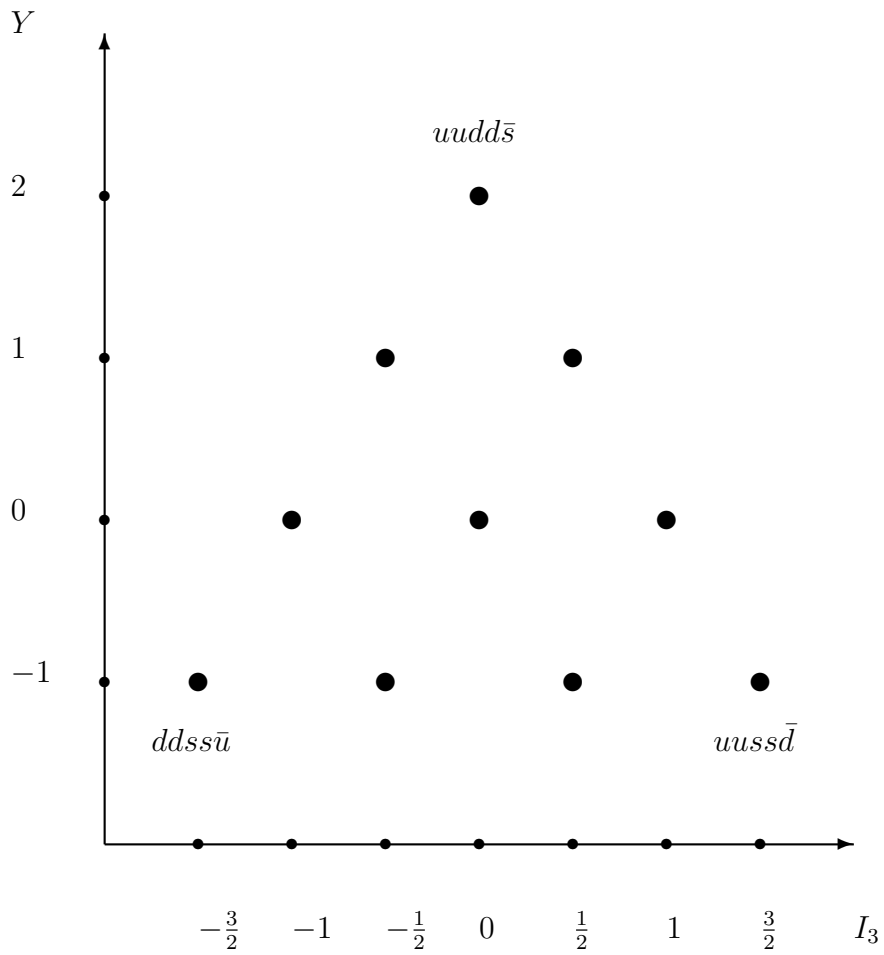
$$\begin{aligned} H &= \frac{\vec{p}^2(1) + \vec{p}^2(2) + \vec{p}^2(3)}{2m} \\ &\quad + \frac{C}{2} \{ [\vec{r}(1) - \vec{r}(2)]^2 + [\vec{r}(1) - \vec{r}(3)]^2 + [\vec{r}(2) - \vec{r}(3)]^2 \} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{p}^2(i)}{2m} + \frac{C}{2} \sum_{i<j=1}^3 [\vec{r}(i) - \vec{r}(j)]^2, \end{aligned} \quad (5.4)$$

wobei  $m = m_u = m_d = m_s$  für die Konstituentenquarkmasse steht. Vorsicht: Die Massen des nichtrelativistischen Modells dürfen nicht mit den QCD-Parametern  $m_u$ ,  $m_d$  und  $m_s$  verwechselt werden.

Der Spin-Flavor-Zustand eines einzelnen Quarks ist Element eines 6-dimensionalen komplexen Hilbert-Raums  $X$ , wobei wir als Basisvektoren

$$|u \uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |u \downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad |s \downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Abbildung 5.1: Pentaquark-Antidekuplett.



wählen. In Gedanken müssen wir uns in Gl. (5.4) noch eine Eins vorstellen, die auf dem Hilbert-Raum  $Z = X \otimes X \otimes X$  wirkt. Ausgedrückt durch die so genannten Jacobi-Koordinaten

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}(1) + \vec{r}(2) + \vec{r}(3)}{3}, \quad \vec{\rho} = \frac{\vec{r}(1) - \vec{r}(2)}{\sqrt{2}}, \quad \vec{\lambda} = \frac{\vec{r}(1) + \vec{r}(2) - 2\vec{r}(3)}{\sqrt{6}} \quad (5.5)$$

und die verallgemeinerten Impulse

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} \quad (M = 3m), \quad \vec{p}_\rho = m\dot{\vec{\rho}}, \quad \vec{p}_\lambda = m\dot{\vec{\lambda}} \quad (5.6)$$

lautet der Hamilton-Operator (siehe Übung 22, Aufgabe 1)

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}_\rho^2 + \vec{p}_\lambda^2}{2m} + \frac{3}{2}C(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2). \quad (5.7)$$

Die Lösungen für die Ortsraumwellenfunktion sind Produkte aus einer ebenen Welle für den Schwerpunkt und Eigenzuständen der harmonischen Oszillatoren bzgl.  $\rho$  und  $\lambda$ . Sie sind von der Form

$$\Psi(\vec{r}(1), \vec{r}(2), \vec{r}(3)) = \frac{e^{i\vec{P}\cdot\vec{R}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\Psi(\vec{\rho}, \vec{\lambda})}_{\text{Produkt zweier h. O.}}. \quad (5.8)$$

Wir definieren:

$$\frac{1}{2}m\omega^2 := \frac{3}{2}C, \quad \alpha := \sqrt{m\omega}.$$

Typische Parameter sind

$$m = 350 \text{ MeV}, \quad \alpha = 320 \text{ MeV}.$$

Zur Erinnerung (Vorsicht, es existieren verschiedene Konventionen und Nomenklaturen in der Literatur): In Kugelkoordinaten lauten die Lösungen für den harmonischen Oszillator

$$\varphi_{n_r l m}(r, \theta, \phi) = R_{n_r l}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

mit

$$R_{n_r l}(r) = N_{n_r l} (\alpha r)^l \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2 r^2\right) L_{n_r}^{l+\frac{1}{2}}(\alpha^2 r^2),$$

wobei  $n := 2n_r + l$ ,  $n_r \in \mathbb{N}_0$  und  $E_n = (n + \frac{3}{2})\omega$ . Hierbei ist

$$N_{n_r l} = \sqrt{\frac{n_r! 2^{n_r+l+2} \alpha^3}{[2n_r + 2l + 1]!! \sqrt{\pi}}}, \quad (2m+1)!! = (2m+1) \cdot (2m-1) \dots 3 \cdot 1, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

eine Normierungskonstante und  $L_{n_r}^{l+\frac{1}{2}}(\alpha^2 r^2)$  ein zugeordnetes Laguerre-Polynom vom Grad  $n_r$  in  $\alpha^2 r^2$ , d. h. vom Grad  $2n_r$  in  $r$ :

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{x^m}{m!}$$

mit

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-k+1)}{k!} & \text{für } k > 0, \\ 1 & \text{für } k = 0, \end{cases}$$

wobei  $a \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Die Grundzustandswellenfunktion lautet demnach

$$|\Psi_0(\vec{\rho}, \vec{\lambda})\rangle = N \exp\left[-\frac{\alpha^2}{2}(\rho^2 + \lambda^2)\right] |56_S\rangle \otimes |F_A\rangle$$

mit der Normierungskonstante

$$N = \frac{4\alpha^3}{\sqrt{\pi}}.$$

Für die  $1-\hbar\omega$ -Anregungen (Dipolzustände) gilt entweder  $l_\rho = 1$  oder  $l_\lambda = 1$ . Diese sind symbolisch von der Form:

$$\begin{aligned} &\sim \vec{\rho} \Psi_0, \\ &\sim \vec{\lambda} \Psi_0. \end{aligned}$$

Die erste Ortsraumwellenfunktion ist vom Typ MA und die zweite von Typ MS. Eine antisymmetrische Wellenfunktion ergibt sich in vollkommener Analogie zu Beispiel 5.3.3 als Überlagerung

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|70_{MS}\rangle \otimes |O_{MS}\rangle + |70_{MA}\rangle \otimes |O_{MA}\rangle) \otimes |F_A\rangle.$$

Schließlich: Die Entartung von Oktett und Dekuplett im Grundzustand wird durch spinabhängige Kräfte aufgehoben.

Weiterführende Literatur:

- N. Isgur und G. Karl, Phys. Rev. D **18**, 4187 (1978)
- Rajat K. Bhaduri, *Models of the Nucleon*, Addison-Wesley, Redwood City 1988, Abschnitt 1.5

# Kapitel 6

## Das Noether-Theorem

### Literatur:

- E. L. Hill, Rev. Mod. Phys. **23**, 253 (1951)
- V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan und C. Rossetti, *Currents in Hadron Physics*, North-Holland, Amsterdam 1973, Kapitel 2.1.1
- M. Gell-Mann und M. Lévy, Nuovo Cimento **16**, 705 (1960)
- S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1995, Kapitel 7.3
- praktisch jedes Buch zur Quantenfeldtheorie

### 6.1 Das Noether-Theorem in der klassischen Feldtheorie

Das Noether-Theorem stellt eine Verbindung zwischen kontinuierlichen Symmetrien eines dynamischen Systems und Erhaltungsgrößen (Konstanten der Bewegung) her. Hier betrachten wir nur so genannte *innere Symmetrien*. (Die Methode erlaubt auch eine Diskussion der Konsequenzen der Poincaré-Invarianz.) Gegeben sei eine Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}$ , die eine Funktion der unabhängigen Felder  $\Phi_i$  und deren ersten Ableitungen  $\partial_\mu \Phi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) – kollektiv gekennzeichnet durch  $\Phi$  und  $\partial_\mu \Phi$  – ist:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi). \quad (6.1)$$

Die Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen lauten:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.2)$$

Wir nehmen an, dass die Lagrange-Dichte aus Gl. (6.1) invariant bzgl. einer *globalen* Transformation der Felder ist, die von  $r$  reellen kontinuierlichen Parametern abhängt.

1. Global bedeutet, dass die Parameter nicht von  $x$  abhängen.
2. Die Transformationen sollen Operationen einer Lie-Gruppe auf der Menge der Felder (dynamische Freiheitsgrade) darstellen (siehe Definition 1.3.1).

Die Methode von Gell-Mann und Lévy [Nuovo Cimento **16**, 705 (1960)] besteht darin, die reellen Parameter durch glatte Funktionen von  $x$  zu ersetzen, d. h. die globale Transformation zu einer *lokalen* zu erheben, mit deren Hilfe sich dann die Noether-Ströme auf einfache Weise identifizieren lassen.

Wir betrachten eine infinitesimale Transformation der Felder, die von  $r$  *lokalen* Parametern abhängt:

$$\Phi_i(x) \mapsto \Phi'_i(x) = \Phi_i(x) + \delta\Phi_i(x) = \Phi_i(x) - i\epsilon_a(x)F_{ai}[\Phi(x)], \quad (6.3)$$

und erhalten unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung  $\epsilon^2$  als Variation der Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu\Phi') - \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu\Phi) \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i}\delta\Phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi_i} \underbrace{\partial_\mu\delta\Phi_i}_{-i[\partial_\mu\epsilon_a(x)]F_{ai} - i\epsilon_a(x)\partial_\mu F_{ai}} \\ &= \epsilon_a(x) \left( -i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i}F_{ai} - i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi_i}\partial_\mu F_{ai} \right) + \partial_\mu\epsilon_a(x) \left( -i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi_i}F_{ai} \right) \\ &=: \epsilon_a(x)\partial_\mu J_a^\mu + \partial_\mu\epsilon_a(x)J_a^\mu. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Mittels Gl. (6.4) definieren wir für jede infinitesimale Transformation einen Strom

$$J_a^\mu = -i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi_i}F_{ai}. \quad (6.5)$$

Wir berechnen von  $J_a^\mu$  aus Gl. (6.5) die Divergenz  $\partial_\mu J_a^\mu$

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_a^\mu &= -i \left( \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi_i} \right) F_{ai} - i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi_i} \partial_\mu F_{ai} \\ &\stackrel{\text{Gl. (6.2)}}{=} -i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i} F_{ai} - i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi_i} \partial_\mu F_{ai} \end{aligned}$$

für Lösungen der Bewegungsgleichungen. Dieser Ausdruck ist also konsistent mit demjenigen aus Gl. (6.4). Mittels Gl. (6.4) lassen sich sowohl Stromdichte als auch deren Divergenz auf einfache Weise bestimmen:

$$J_a^\mu = \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\epsilon_a}, \quad (6.6)$$

$$\partial_\mu J_a^\mu = \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\epsilon_a}. \quad (6.7)$$

Wir haben die Parameter der Transformation als lokal angesetzt. Allerdings haben wir angenommen, dass die Lagrange-Dichte aus Gl. (6.1) invariant bzgl. einer globalen Transformation ist. In diesem Fall verschwindet der Ausdruck  $\partial_\mu \epsilon_a$  und wir sehen aus Gl. (6.4) wegen der Invarianz der Lagrange-Dichte bzgl. solcher Transformationen, dass die Ströme  $J_a^\mu$  erhalten sind, d. h.  $\partial_\mu J_a^\mu = 0$ .

**6.1.1 Noether-Theorem:** Jeder kontinuierlichen, globalen Symmetrietransformation, die die Lagrange-Dichte invariant lässt, ist ein Erhaltungssatz und eine Konstante der Bewegung zugeordnet:

$$\delta\mathcal{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu J_a^\mu = 0. \quad (6.8)$$

Wir haben also einen erhaltenen Strom  $J_a^\mu$  mit einer erhaltenen d. h. zeitunabhängigen Ladung:

$$Q_a(t) = \int d^3x J_a^0(t, \vec{x}). \quad (6.9)$$

Wir zeigen die Zeitunabhängigkeit:

$$\frac{dQ_a(t)}{dt} = \int d^3x \frac{\partial J_a^0(t, \vec{x})}{\partial t}$$

Wir benutzen

$$\int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_a = \int d\vec{F} \cdot \vec{J}_a = \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \int d\Omega \hat{e}_r \cdot \vec{J}_a = 0.$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Stromdichte  $\vec{J}_a(t, \vec{x})$  für  $r = |\vec{x}| \rightarrow \infty$  schneller als  $1/r^2$  abfallen muss. Dies ist in der Regel gewährleistet, es sei denn die Theorie enthält masselose „geladene“ Teilchen [siehe Diskussion in J. Bernstein, Rev. Mod. Phys. **46**, 7 (1974), im Anschluss an Gl. (2.6)].

$$\begin{aligned} &= \int d^3x \left[ \frac{\partial J_a^0(t, \vec{x})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_a(t, \vec{x}) \right] \\ &= \int d^3x \partial_\mu J_a^\mu(t, \vec{x}) \\ &= \int d^3x \frac{\partial \delta\mathcal{L}}{\partial \epsilon_a} \\ &= 0 \quad \text{für} \quad \delta\mathcal{L} = 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Bemerkung: Wir waren in unserer Voraussetzung  $\delta\mathcal{L} = 0$  sehr restriktiv. Die verschiedenen Möglichkeiten werden in Abschnitt 7.3 aus S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol. 1, diskutiert und sind in der folgenden Tabelle in symbolischer Form mit  $\Phi \mapsto \Phi + \delta\Phi = \Phi + \epsilon\delta\tilde{\Phi}$  zusammengefasst:



Invariante Größe	Stromdichte oder Ladung
$\delta\mathcal{L} = 0$	$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\tilde{\Phi}}\delta\tilde{\Phi}$
$\delta\mathcal{L} = \epsilon\partial_\mu\mathcal{J}^\mu$	$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\tilde{\Phi}}\delta\tilde{\Phi} - \mathcal{J}^\mu$
$\delta L = 0$	$Q = \int d^3x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\tilde{\Phi}}\delta\tilde{\Phi}$
$\delta L = \epsilon \frac{dQ(t)}{dt}$	$Q = \int d^3x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\tilde{\Phi}}\delta\tilde{\Phi} - Q$
$\delta S = 0$	Explizite Form von $J^\mu$ a priori nicht bekannt

**Anmerkung 6.1.2** Wir haben bisher nur mit klassischen Feldern gearbeitet. Deshalb ist die „Ladung“  $Q_a$  (Konstante der Bewegung) bisher nicht quantisiert. Sie kann jeden beliebigen kontinuierlichen Wert annehmen.

**Beispiel 6.1.3** Wir betrachten die Lagrange-Dichte für zwei skalare Felder  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  gleicher Masse  $m$  mit einer  $\lambda\Phi^4$ -Wechselwirkung:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_\mu\Phi_1\partial^\mu\Phi_1 + \partial_\mu\Phi_2\partial^\mu\Phi_2 - m^2(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)] - \frac{\lambda}{4} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2 \quad (6.11)$$

mit  $m^2 > 0$  und  $\lambda > 0$ .

Wir führen eine infinitesimale, aktive Drehung um den Winkel  $\epsilon(x)$  durch:<sup>1</sup>

$$D(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}$$

mit folgender Wirkung auf die Felder:

$$\begin{aligned} \Phi'_1 &= \Phi_1 + \delta\Phi_1 = \Phi_1 - \epsilon(x)\Phi_2, \\ \Phi'_2 &= \Phi_2 + \delta\Phi_2 = \Phi_2 + \epsilon(x)\Phi_1. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Die Änderung der Lagrange-Dichte lautet

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i}\delta\Phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi_i}\partial_\mu\delta\Phi_i \\ &= \underbrace{-m^2\Phi_1[-\epsilon(x)]\Phi_2 - m^2\Phi_2\epsilon(x)\Phi_1}_0 \\ &\quad - \underbrace{\lambda(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)\{\Phi_1[-\epsilon(x)]\Phi_2 + \Phi_2\epsilon(x)\Phi_1\}}_0 \\ &\quad + \partial^\mu\Phi_1\partial_\mu[-\epsilon(x)\Phi_2] + \partial^\mu\Phi_2\partial_\mu[\epsilon(x)\Phi_1] \\ &= \partial_\mu\epsilon(x)(-\partial^\mu\Phi_1\Phi_2 + \Phi_1\partial^\mu\Phi_2). \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\Rightarrow J^\mu = \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\epsilon} = \Phi_1\partial^\mu\Phi_2 - \partial^\mu\Phi_1\Phi_2, \quad \partial_\mu J^\mu = \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\epsilon} = 0. \quad (6.14)$$

<sup>1</sup>Wenn wir die Felder (später Feldoperatoren) aktiv „drehen“ müssen wir die Hilbert-Raum-Zustände entgegengesetzt transformieren.

Fazit: Die Lagrange-Dichte aus Gl. (6.11) ist invariant bzgl. einer globalen Drehung der Felder  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  (Gruppeninvariante, Definition Operation einer Gruppe auf einer Menge siehe 1.3.1). Die zugehörige Gruppe ist die Gruppe der eigentlichen Rotationen in zwei Dimensionen  $SO(2) \cong U(1)$ , deren Elemente durch einen kontinuierlichen Parameter  $0 \leq \varphi < 2\pi$  charakterisiert werden können. Mit dieser Invarianz ist der erhaltene Strom aus Gl. (6.14) verknüpft.

**Beispiel 6.1.4** Es seien  $m$  und  $m + \delta$  die zu  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  gehörigen Massen, der Rest wie oben. Was passiert?

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \epsilon[m^2\Phi_1\Phi_2 - (m + \delta)^2\Phi_1\Phi_2] + \partial_\mu\epsilon(\Phi_1\partial^\mu\Phi_2 - \partial^\mu\Phi_1\Phi_2) \\ &= \epsilon(-2m\delta - \delta^2)\Phi_1\Phi_2 + \partial_\mu\epsilon(\Phi_1\partial^\mu\Phi_2 - \partial^\mu\Phi_1\Phi_2), \\ \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\epsilon} &= -(2m\delta + \delta^2)\Phi_1\Phi_2 = \partial_\mu J^\mu \neq 0. \end{aligned}$$

Eine kleine Massenaufspaltung führt also dazu, dass der Strom nicht mehr exakt erhalten ist. Solche Situationen treten in der Teilchenphysik häufiger auf, z. B. im Proton-Neutron-System, und können in einer ersten Näherung meistens vernachlässigt werden.

## 6.2 Mehr zum Noether-Theorem in der Quantenfeldtheorie

In Abschnitt 6.1 diskutierten wir das Noether-Theorem im Rahmen der klassischen Feldtheorie. Insbesondere bedeutete dies für die Ladung  $Q_a(t)$  aus Gl. (6.9), dass sie jeden beliebigen Wert annehmen konnte.

- Welche Konsequenzen ergeben sich aus dem Übergang zur Quantenfeldtheorie?

**Motivation 6.2.1** Dazu erinnern wir uns zunächst an den Übergang von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik. Wir betrachten einen Massenpunkt (Masse  $m$ ) in einem Zentralpotential  $V(r)$ , d. h. die entsprechenden Lagrange- und Hamilton-Funktionen sind rotationsinvariant. Als Resultat dieser Symmetrie ist der Drehimpuls  $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$  eine Konstante der Bewegung, die in der klassischen Mechanik einen beliebigen kontinuierlichen reellen Wert annehmen kann. Beim Übergang zur Quantenmechanik werden aus den Komponenten von  $\vec{r}$  und  $\vec{p}$  hermitesche, lineare Operatoren, die (im Schrödinger-Bild) den Vertauschungsrelationen

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}, \quad [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$$

genügen. Für den späteren Vergleich mit der Quantenfeldtheorie drücken wir die Komponenten des Drehimpulsoperators

$$\hat{l}_i = \epsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k$$

mit Hilfe der (3, 3)-Matrizen  $L_i^{\text{ad}}$  der adjungierten Darstellung (siehe Übung 12, Aufgabe 2) aus:

$$\hat{l}_i = -i\hat{p}_j \underbrace{(-i\epsilon_{ijk})}_{(L_i^{\text{ad}})_{jk}} \hat{x}_k. \quad (6.15)$$

Sowohl die Matrizen der adjungierten Darstellung als auch die Komponenten des Drehimpulsoperators erfüllen die Drehimpulsvertauschungsrelationen

$$[L_i^{\text{ad}}, L_j^{\text{ad}}] = i\epsilon_{ijk} L_k^{\text{ad}}, \quad [\hat{l}_i, \hat{l}_j] = i\epsilon_{ijk} \hat{l}_k,$$

d. h. sie können nicht gleichzeitig diagonalisiert werden.

Vielmehr organisieren sich die Zustände als Eigenzustände von  $\hat{l}^2$  und  $\hat{l}_3$  mit Eigenwerten  $l(l+1)$  und  $m = -l, -l+1, \dots, l$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ). Die Rotationsinvarianz des Quantensystems impliziert, dass die Komponenten des Drehimpulsoperators mit dem Hamilton-Operator kommutieren,

$$[\hat{H}, \hat{l}_i] = 0,$$

d. h. sie sind immer noch Konstanten der Bewegung. Man diagonalisiert dann gleichzeitig  $\hat{H}$ ,  $\hat{l}^2$  und  $\hat{l}_3$ . Z. B. sind die Eigenwerte des Wasserstoffatoms durch

$$E_n = -\frac{\alpha^2 m}{2n^2} \approx -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}$$

gegeben, wobei  $n = n' + l + 1$ ,  $n' \geq 0$  die so genannte Hauptquantenzahl bezeichnet, und der Entartungsgrad eines Energieniveaus unter Vernachlässigung des Spins (Faktor 2) durch  $n^2$  gegeben ist. Der Wert  $E_1$  und die Abstände der Energieniveaus werden durch die *Dynamik* des Systems bestimmt, d. h. durch die spezifische Form des Potentials, wohingegen die Multiplizität der Energieniveaus eine Konsequenz der zu Grunde liegenden *Rotationssymmetrie* ist.<sup>2</sup>

Am Beispiel der kanonischen Quantisierung des freien skalaren Feldes sieht man, dass Größen wie  $\Phi$ ,  $\Pi = \partial\mathcal{L}/\partial\partial_0\Phi$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $H$ ,  $\vec{P}$  zu Operatoren werden, die auf einem Hilbert-Raum wirken.

**Beispiel 6.2.2** Im Folgenden betrachten wir der Einfachheit halber zunächst eine Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu\Phi)$$

mehrerer, wechselwirkender, skalarer Felder, die den kanonischen gleichzeitigen Vertauschungsrelationen (GZVR) gehorchen sollen:

$$[\Phi_i(t, \vec{x}), \Pi_j(t, \vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\delta_{ij}, \quad (6.16)$$

$$[\Phi_i(t, \vec{x}), \Phi_j(t, \vec{y})] = 0, \quad (6.17)$$

$$[\Pi_i(t, \vec{x}), \Pi_j(t, \vec{y})] = 0. \quad (6.18)$$

<sup>2</sup>Die „zufällige“ Entartung für  $n \geq 2$  ist das Resultat einer noch höheren Symmetrie des  $1/r$ -Potentials, nämlich einer  $O(4)$ -Symmetrie.

Als wichtigen Spezialfall von Gl. (6.3),

$$\Phi_i(x) \mapsto \Phi'_i(x) = \Phi_i(x) + \delta\Phi_i(x) = \Phi_i(x) - i\epsilon_a(x)F_{ai}[\Phi(x)],$$

betrachten wir infinitesimale Transformationen, die *linear* in den Feldern sind,

$$\Phi_i(x) \mapsto \Phi'_i(x) = \Phi_i(x) - i\epsilon_a(x)t_{a,ij}\Phi_j(x), \quad (6.19)$$

wobei  $t_{a,ij}$  Konstanten sind, die in der Regel eine Mischung der Felder bewirken (Summation über Indizes impliziert). Aus Gl. (6.5),

$$J_a^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i} F_{ai},$$

folgt für den Spezialfall

$$J_a^\mu(x) = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i} t_{a,ij} \Phi_j, \quad (6.20)$$

$$Q_a(t) = -i \int d^3x \Pi_i(x) t_{a,ij} \Phi_j(x). \quad (6.21)$$

Für die Kommutatoren der (verallgemeinerten) Ladungsoperatoren mit den Feldoperatoren gilt

$$\begin{aligned} & [Q_a(t), \Phi_k(t, \vec{y})] \\ &= -it_{a,ij} \int d^3x [\Pi_i(t, \vec{x}) \Phi_j(t, \vec{x}), \Phi_k(t, \vec{y})] \\ &= -it_{a,ij} \int d^3x \left( \underbrace{\Pi_i(t, \vec{x}) [\Phi_j(t, \vec{x}), \Phi_k(t, \vec{y})]}_0 + \underbrace{[\Pi_i(t, \vec{x}), \Phi_k(t, \vec{y})]}_{-i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\delta_{ik}} \Phi_j(t, \vec{x}) \right) \\ &= -t_{a,kj} \Phi_j(t, \vec{y}). \end{aligned} \quad (6.22)$$

**Analogie 6.2.3** Vergleiche mit der Darstellungstheorie der Drehgruppe in der QM (siehe 4. von 2.1.2):

$$\begin{aligned} x'_i &= R_{ij}x_j, \\ |\Psi'\rangle &= D(R)|\Psi\rangle, \\ D(R) &= \exp(-i\vec{\omega} \cdot \vec{l}) = \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma), \\ D(R)\Psi(\vec{x}) &= \Psi(R^{-1}\vec{x}). \end{aligned}$$

Das Transformationsverhalten eines Operators  $A$  ergab sich aus der Forderung

$$\begin{aligned} \langle \Phi|A|\Psi\rangle &\stackrel{!}{=} \langle \Phi'|A'|\Psi'\rangle \\ &= \langle \Phi|D^\dagger(R)A'D(R)|\Psi\rangle \forall \langle \Phi|, |\Psi\rangle, \end{aligned}$$

so dass

$$A' = D(R)AD^\dagger(R).$$

Beispiel infinitesimale Drehung  $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{\epsilon} \times \vec{x}$ . Was bedeutet dies für den Ortsoperator  $\vec{r}$  (für Impulsoperator  $\vec{p}$  und Drehimpulsoperator  $\vec{l}$  analog, siehe 4.3.16)?

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r} + \delta\vec{r} \\ &= (1 - i\vec{\epsilon} \cdot \vec{l}) \vec{r} (1 + i\vec{\epsilon} \cdot \vec{l}) \\ &= \vec{r} - i[\vec{\epsilon} \cdot \vec{l}, \vec{r}]\end{aligned}$$

$$\epsilon_i \epsilon_{ijk} [r_j p_k, r_l] = \epsilon_i \epsilon_{ijk} (r_j \underbrace{[p_k, r_l]}_{-i\delta_{kl}} + \underbrace{[r_j, r_l]}_0 p_k) = -i\epsilon_i \epsilon_{ijl} r_j = -i(\vec{\epsilon} \times \vec{r})_l$$

$$\dots = \vec{r}' - \vec{\epsilon} \times \vec{r},$$

d. h. (Vorzeichen!)

$$\delta\vec{r} = -\vec{\epsilon} \times \vec{r}.$$

An dieser Stelle wollen wir die Entsprechungen für den Fall der Rotationen im Fall der QM zusammenstellen. Um konsistent zu bleiben, betrachten wir jeweils Orts-, Impuls- und Drehimpulsoperator im Heisenberg-Bild (Dächer zur Kennzeichnung von Operatoren weggelassen)

$$\begin{aligned}x_i(t) &\leftrightarrow \Phi_i(t, \vec{x}), \\ p_j(t) &\leftrightarrow \Pi_j(t, \vec{y}),\end{aligned}$$

$$l_k(t) = \epsilon_{ijk} x_i(t) p_j(t) = -i p_i(t) (-i \epsilon_{ijk}) x_j(t) \leftrightarrow -i \int d^3x \Pi_i(x) t_{ij}^a \Phi_j(x).$$

Von den Drehimpulsoperatoren wissen wir, dass sie die Generatoren infinitesimaler Transformationen der Hilbert-Raum-Zustände sind.

- Ziel: Feldoperatoren mit wohldefinierten Vertauschungsrelationen mit den Ladungsoperatoren  $Q_a(t)$ .

Beachte die Analogie zur Definition eines irreduziblen, sphärischen Tensoroperators  $n$ -ter Stufe  $A^{(n)}$  aus 4.3.15:

$$[J_3, A_\nu^{(n)}] = \nu A_\nu^{(n)}, \quad [J_\pm, A_\nu^{(n)}] = \sqrt{n(n+1) - \nu(\nu \pm 1)} A_{\nu \pm 1}^{(n)}.$$

$$J_i \leftrightarrow Q_a(t), \quad A_\nu^{(n)} \leftrightarrow \Phi_k(t, \vec{y}).$$

- Anmerkung: Wir haben nicht benutzt, dass  $Q_a(t)$  zeitunabhängig ist.

**Interpretation 6.2.4** der Ladungsoperatoren  $Q_a(t)$  aus Gl. (6.21). Gegeben sei eine globale, infinitesimale Transformation, die wir mittels der reellen Konstanten  $\epsilon_a$  charakterisieren. Auf die Felder wirke die Transformation laut Gl. (6.19). Für das Transformationsverhalten der Zustände des Hilbert-Raums machen wir den Ansatz

$$|\alpha'\rangle = \exp(i\epsilon_a G_a)|\alpha\rangle. \quad (6.23)$$

Wir fordern

$$\langle\beta'|\alpha'\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle, \quad (6.24)$$

woraus folgt, dass die  $G_a$  hermitesche Operatoren sind.

Kurze Randbemerkung: Genau genommen sollten wir nur

$$|\langle\beta'|\alpha'\rangle| = |\langle\beta|\alpha\rangle|$$

fordern. Wir beschränken uns hier auf unitäre Transformationen. Für die Zeitumkehr benötigt man einen antiunitären Operator.

Weiterhin folgt aus

$$\langle\beta|A|\alpha\rangle = \langle\beta'|A'|\alpha'\rangle \quad \forall |\alpha\rangle, |\beta\rangle, \epsilon_a, \quad (6.25)$$

zusammen mit Gl. (6.19)

$$\begin{aligned} \langle\beta|\Phi_i(x)|\alpha\rangle &= \langle\beta'|\Phi'_i(x)|\alpha'\rangle \\ &= \langle\beta|(1 - i\epsilon_a G_a)[\Phi_i(x) - i\epsilon_b t_{b,ij}\Phi_j(x)](1 + i\epsilon_c G_c)|\alpha\rangle. \end{aligned}$$

Vergleich beider Seiten liefert

$$-i\epsilon_a[G_a, \Phi_i(x)] \underbrace{-i\epsilon_a t_{a,ij}\Phi_j(x)}_{i\epsilon_a[Q_a, \Phi_i(x)] \text{ wegen Gl. (6.22)}} = 0. \quad (6.26)$$

**Folgerung 6.2.5** Die Ladungsoperatoren  $Q_a$  aus Gl. (6.21) sind gerade die Erzeugenden für die Transformation der Zustände des Hilbert-Raums, die mit Gl. (6.19) einhergehen.

**6.2.6 Vertauschungsrelationen.** Wir untersuchen nun die Vertauschungsrelationen für den Fall mehrerer Generatoren (siehe Übung 22, Aufgabe 4):

$$\begin{aligned}
[Q_a(t), Q_b(t)] &= - \int d^3x d^3y [\Pi_i(t, \vec{x}) t_{a,ij} \Phi_j(t, \vec{x}), \Pi_k(t, \vec{y}) t_{b,kl} \Phi_l(t, \vec{y})] \\
(6.17), (6.18) &\stackrel{=}{=} - t_{a,ij} t_{b,kl} \int d^3x d^3y \left( \Pi_i(t, \vec{x}) [\Phi_j(t, \vec{x}), \Pi_k(t, \vec{y})] \Phi_l(t, \vec{y}) \right. \\
&\quad \left. + \Pi_k(t, \vec{y}) [\Pi_i(t, \vec{x}), \Phi_l(t, \vec{y})] \Phi_j(t, \vec{x}) \right) \\
(6.16) &\stackrel{=}{=} \dots \left( \Pi_i(t, \vec{x}) i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{jk} \Phi_l(t, \vec{y}) - \Pi_k(t, \vec{y}) i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{il} \Phi_j(t, \vec{x}) \right) \\
&= -i t_{a,ij} t_{b,kl} \int d^3x \left( \Pi_i(t, \vec{x}) \Phi_l(t, \vec{x}) \delta_{jk} - \Pi_k(t, \vec{x}) \Phi_j(t, \vec{x}) \delta_{il} \right) \\
&= -i \int d^3x \left( \Pi_i(t, \vec{x}) t_{a,ij} t_{b,jl} \Phi_l(t, \vec{x}) - \Pi_k(t, \vec{x}) t_{b,kl} t_{a,lj} \Phi_j(t, \vec{x}) \right) \\
&= -i (t_{a,ij} t_{b,jk} - t_{b,ij} t_{a,jk}) \int d^3x \Pi_i(t, \vec{x}) \Phi_k(t, \vec{x}). \tag{6.27}
\end{aligned}$$

- Wann ist die rechte Seite von Gl. (6.27) proportional zu einer Ladung?

Falls

$$t_{a,ij} t_{b,jk} - t_{b,ij} t_{a,jk} = i C_{abc} t_{c,ik}, \tag{6.28}$$

bilden die Ladungsoperatoren  $Q_a(t)$  eine Lie-Algebra

$$[Q_a(t), Q_b(t)] = i C_{abc} Q_c(t) \tag{6.29}$$

mit den Strukturkonstanten  $C_{abc}$ .

Fazit: Die  $(n, n)$ -Matrizen  $t^a$  ( $a = 1, \dots, r$ ) sollen eine  $n$ -dimensionale Darstellung einer Lie-Algebra bilden.

### 6.2.7 Mehr zur Bedeutung der Ladungsoperatoren.

1. Für zeitunabhängige Ladungsoperatoren gilt im Heisenberg-Bild

$$\frac{dQ_a}{dt} = i[Q_a, H] = 0,$$

d. h.  $H$  und  $Q_a$  lassen sich gleichzeitig diagonalisieren. Die Entartung eines Energieniveaus wird mit der Dimensionalität irreduzibler Darstellungen der Symmetriegruppe verknüpft. Dies bedeutet, dass eine Untersuchung des Teilchenspektrums Rückschlüsse auf eine zugrundeliegende Symmetrie zulässt.

- Beispiel: Isospin-Multipletts (siehe Tabelle 4.1)
2. Aufgrund von Symmetrien sind Streuamplituden verschiedener Prozesse miteinander verknüpft.

- Beispiel: Für die  $\pi N$ -Streuung existieren nur zwei unabhängige Streuamplituden  $T_{\frac{1}{2}}$  und  $T_{\frac{3}{2}}$  (folgt aus dem Wigner-Eckart-Theorem, siehe 4.4.3):

$$\langle I'I'_3|T|II_3\rangle = T_I\delta_{II'}\delta_{I_3I'_3}.$$

3. So genannte Ward-Identitäten verknüpfen die Divergenz einer Green'schen Funktion, die mindestens einen Symmetriestrom enthält, mit einer Linearkombination anderer Green'scher Funktionen.

Wir gehen im Folgenden von Gl. (6.28) aus und interpretieren die Konstanten  $t_{a,ij}$  als Einträge in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte einer  $(n, n)$ -Matrix  $T_a$ :

$$t_{a,ij} = (T_a)_{ij}.$$

Diese Matrizen bilden dann aufgrund von Gl. (6.28) eine  $n$ -dimensionale Darstellung einer Lie-Algebra:

$$[T_a, T_b] = iC_{abc}T_c.$$

Die infinitesimale, lineare Transformation der Felder  $\Phi_i$  lässt sich dann in kompakter Form darstellen:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{pmatrix} = \Phi(x) \mapsto \Phi'(x) = (1 - i\epsilon_a T_a)\Phi(x). \quad (6.30)$$

**Beispiel 6.2.8** Um die Diskussion möglichst einfach zu halten, betrachten wir zunächst die skalare Feldtheorie aus Beispiel 6.1.3 mit einer globalen  $SO(2)$ -Invarianz [ $U(1)$ -Invarianz] (siehe Übung 22, Aufgabe 2):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi_1\partial^\mu\Phi_1 + \partial_\mu\Phi_2\partial^\mu\Phi_2) - \frac{m^2}{2}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2 \\ &= \partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2, \end{aligned} \quad (6.31)$$

mit

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi_1(x) + i\Phi_2(x)], \quad \Phi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi_1(x) - i\Phi_2(x)],$$

wobei  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  reelle skalare Felder sind. (Außerdem nehmen wir  $m^2 > 0$  und  $\lambda > 0$  an, so dass die Theorie keine spontane Symmetriebrechung erzeugt und die Energie nach unten beschränkt ist.) Gleichung (6.31) ist invariant bzgl. einer globalen Transformation der Felder

$$\Phi'_1 = \Phi_1 - \epsilon\Phi_2, \quad \Phi'_2 = \Phi_2 + \epsilon\Phi_1, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.32)$$



oder, was dazu äquivalent ist,

$$\Phi' = (1 + i\epsilon)\Phi, \quad \Phi'^{\dagger} = (1 - i\epsilon)\Phi^{\dagger}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.33)$$

wobei  $\epsilon$  ein infinitesimaler reeller Parameter ist. Mit Hilfe der Methode von Gell-Mann und Lévy erhalten wir für einen *lokalen* Parameter  $\epsilon(x)$  als Variation

$$\delta\mathcal{L} = \partial_{\mu}\epsilon(x)(i\partial^{\mu}\Phi^{\dagger}\Phi - i\Phi^{\dagger}\partial^{\mu}\Phi), \quad (6.34)$$

und damit

$$J^{\mu} = \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\epsilon} = i\partial^{\mu}\Phi^{\dagger}\Phi - i\Phi^{\dagger}\partial^{\mu}\Phi, \quad (6.35)$$

$$\partial_{\mu}J^{\mu} = \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\epsilon} = 0. \quad (6.36)$$

Im Rahmen der kanonischen Quantisierung definieren wir zunächst verallgemeinerte Impulse

$$\Pi_i(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\Phi_i}, \quad \Pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\Phi}, \quad \Pi^{\dagger}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\Phi^{\dagger}}, \quad (6.37)$$

die (im Heisenberg-Bild) mit den Feldern die GZVR erfüllen sollen:

$$[\Phi_i(t, \vec{x}), \Pi_j(t, \vec{y})] = i\delta_{ij}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (6.38)$$

und

$$[\Phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = [\Phi^{\dagger}(t, \vec{x}), \Pi^{\dagger}(t, \vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (6.39)$$

(Die übrigen GZVR zwischen Feldern bzw. Impulsen verschwinden.) Mit Hilfe von Gl. (6.39) erhalten wir die folgenden GZVR (siehe Übung 22, Aufgabe 5):

$$\begin{aligned} [J^0(t, \vec{x}), \Phi(t, \vec{y})] &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\Phi(t, \vec{x}), \\ [J^0(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] &= -\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\Pi(t, \vec{x}), \\ [J^0(t, \vec{x}), \Phi^{\dagger}(t, \vec{y})] &= -\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\Phi^{\dagger}(t, \vec{x}), \\ [J^0(t, \vec{x}), \Pi^{\dagger}(t, \vec{y})] &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\Pi^{\dagger}(t, \vec{x}). \end{aligned} \quad (6.40)$$

(Aus  $[A, B] = AB - BA = C$  erhalten wir  $[A^{\dagger}, B^{\dagger}] = -C^{\dagger}$ . Beachte  $J^0(x) = J^{0\dagger}(x)$ ).

Führt man nun die Integration  $\int d^3x$  in Gl. (6.40) aus, erhält man für die Vertauschungsrelationen mit dem Ladungsoperator

$$\begin{aligned} [Q, \Phi(x)] &= \Phi(x), \\ [Q, \Pi(x)] &= -\Pi(x), \\ [Q, \Phi^{\dagger}(x)] &= -\Phi^{\dagger}(x), \\ [Q, \Pi^{\dagger}(x)] &= \Pi^{\dagger}(x). \end{aligned} \quad (6.41)$$

Welche Schlüsse lassen sich aus Gl. (6.41) ziehen? Dazu betrachten wir einen Eigenzustand  $|\alpha\rangle$  von  $Q$  mit Eigenwert  $q_\alpha$  und untersuchen beispielsweise die Wirkung von  $\Phi(x)$  auf diesen Zustand:

$$Q(\Phi(x)|\alpha\rangle) = ([Q, \Phi(x)] + \Phi(x)Q)|\alpha\rangle = (1 + q_\alpha)(\Phi(x)|\alpha\rangle).$$

Fazit: Die Operatoren  $\Phi(x)$  und  $\Pi^\dagger(x)$  [ $\Phi^\dagger(x)$  und  $\Pi(x)$ ] erhöhen (vermindern) die (Noether-) Ladung eines Systems um eine Einheit.

**Beispiel 6.2.9** \* Um auch den Fall zu behandeln, dass Fermionen auftreten, diskutieren wir die Isospininvarianz der starken Wechselwirkung und betrachten insgesamt fünf Felder. Wir beginnen mit den Vertauschungsrelationen der Isospin-Algebra:

$$[Q_i, Q_j] = i\epsilon_{ijk}Q_k. \quad (6.42)$$

Für die so genannte Fundamentaldarstellung ( $n = 2$ ) benutzen wir als Basis

$$T_i^f = \frac{1}{2}\tau_i \quad (\text{f: fundamental}). \quad (6.43)$$

Wir ersetzen  $\Phi_{4,5}$  durch das Fermion-Dublett

$$\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (6.44)$$

mit dem Protonfeld  $p$  und dem Neutronfeld  $n$ . Die Matrizen der adjungierten Darstellung ( $n = 3$ ) sind gegeben durch [siehe Übung 12, Aufgabe 2 (c)]

$$t_{i,jk}^{\text{ad}} = (T_i^{\text{ad}})_{jk} = -i\epsilon_{ijk}, \quad (6.45)$$

d. h. ganz konkret

$$T_1^{\text{ad}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2^{\text{ad}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3^{\text{ad}} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.46)$$

Wir setzen  $\Phi_{1,2,3} \rightarrow \vec{\Phi}$  und betrachten die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m_N)\Psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\Phi} \cdot \partial^\mu \vec{\Phi} - M_\pi^2 \vec{\Phi}^2) - ig\bar{\Psi}\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}\Psi, \quad (6.47)$$

wobei  $g = g_{\pi N} = 13.2$  die Pion-Nukleon-Kopplungskonstante bezeichnet. Als konkrete Anwendung der infinitesimalen Transformationen aus Gl. (6.19) betrachten wir

$$\begin{pmatrix} \vec{\Phi} \\ \Psi \end{pmatrix} \mapsto (\mathbb{1} - i\epsilon_i(x)T_i) \begin{pmatrix} \vec{\Phi} \\ \Psi \end{pmatrix}, \quad T_i = \begin{pmatrix} T_i^{\text{ad}} & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 3} & T_i^f \end{pmatrix}, \quad (6.48)$$

( $T_i$  blockdiagonal), d. h.

$$\Psi \mapsto \Psi' = \left( \mathbb{1} - i \vec{\epsilon}(x) \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} \right) \Psi, \quad (6.49)$$

$$\vec{\Phi} \mapsto \left( \mathbb{1} - i \vec{\epsilon}(x) \cdot \vec{T}^{\text{ad}} \right) \vec{\Phi} \stackrel{*}{=} \vec{\Phi} + \vec{\epsilon} \times \vec{\Phi}, \quad (6.50)$$

wobei wir in  $*$  benutzt haben

$$-i\vec{T}^{\text{ad}} \cdot \vec{\epsilon} \vec{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_3 & \epsilon_2 \\ \epsilon_3 & 0 & -\epsilon_1 \\ -\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon_3 \Phi_2 + \epsilon_2 \Phi_3 \\ \epsilon_3 \Phi_1 - \epsilon_1 \Phi_3 \\ -\epsilon_2 \Phi_1 + \epsilon_1 \Phi_2 \end{pmatrix} = \vec{\epsilon} \times \vec{\Phi}.$$

Die Transformation wirkt auf  $\vec{\Phi}$  wie eine infinitesimale aktive Drehung um den Winkel  $|\vec{\epsilon}|$  bzgl. der Achse  $\hat{\epsilon}$  im Isospinraum. Wir betrachten nun die Änderung der Lagrange-Dichte (siehe Übung 23, Aufgabe 1)

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \vec{\epsilon} \cdot \left( \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\vec{\tau}}{2} \Psi + \vec{\Phi} \times \partial^\mu \vec{\Phi} \right). \quad (6.51)$$

Aus Gl. (6.6) und (6.7) folgt nun

$$J_i^\mu = \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \epsilon_i} = \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\tau_i}{2} \Psi + \epsilon_{ijk} \Phi_j \partial^\mu \Phi_k, \quad (6.52)$$

$$\partial_\mu J_i^\mu = \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \epsilon_i} = 0. \quad (6.53)$$

Mit  $\dot{\Phi}_k = \Pi_k$  haben wir also drei erhaltene, d. h. zeitunabhängige Ladungsoperatoren

$$Q_i = \int d^3x \left( \Psi^\dagger(x) \frac{\tau_i}{2} \Psi(x) + \epsilon_{ijk} \Phi_j(x) \Pi_k(x) \right). \quad (6.54)$$

Die Operatoren  $Q_i$  sind die Erzeugenden für SU(2)-Transformationen der Hilbert-Raum-Zustände.

- Die Erzeugenden zerfallen in zwei Anteile, die mit einander kommutieren.

Mit Hilfe der gleichzeitigen (Anti-) Vertauschungsrelationen (Achtung: Antikommutatoren für Fermionen!)

$$\{\Psi_{\alpha,r}(t, \vec{x}), \Psi_{\beta,s}^\dagger(t, \vec{y})\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{\alpha\beta} \delta_{rs}, \quad (6.55)$$

$$\{\Psi_{\alpha,r}(t, \vec{x}), \Psi_{\beta,s}(t, \vec{y})\} = 0, \quad (6.56)$$

$$\{\Psi_{\alpha,r}^\dagger(t, \vec{x}), \Psi_{\beta,s}^\dagger(t, \vec{y})\} = 0, \quad (6.57)$$

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  Dirac-Indizes und  $r$  und  $s$  Isospin-Indizes sind, sowie

$$[\Phi_r(t, \vec{x}), \Pi_s(t, \vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{rs}, \quad (6.58)$$

$$[\Phi_r(t, \vec{x}), \Phi_s(t, \vec{y})] = 0, \quad (6.59)$$

$$[\Pi_r(t, \vec{x}), \Pi_s(t, \vec{y})] = 0 \quad (6.60)$$

und der Tatsache, dass Fermionfelder mit Bosonfelder vertauschen verifizieren wir

$$[Q_i, Q_j] = i\epsilon_{ijk}Q_k. \quad (6.61)$$

- Begründung:

$$\begin{aligned} [Q_i, Q_j] &= \int d^3x d^3y \left[ \Psi^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\tau_i}{2} \Psi(t, \vec{x}) + \epsilon_{ikl} \Phi_k(t, \vec{x}) \Pi_l(t, \vec{x}), \right. \\ &\quad \left. \Psi^\dagger(t, \vec{y}) \frac{\tau_j}{2} \Psi(t, \vec{y}) + \epsilon_{jmn} \Phi_m(t, \vec{y}) \Pi_n(t, \vec{y}) \right] \\ &= \int d^3x d^3y \left( [\Psi^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\tau_i}{2} \Psi(t, \vec{x}), \Psi^\dagger(t, \vec{y}) \frac{\tau_j}{2} \Psi(t, \vec{y})] \right. \\ &\quad \left. + [\epsilon_{ikl} \Phi_k(t, \vec{x}) \Pi_l(t, \vec{x}), \epsilon_{jmn} \Phi_m(t, \vec{y}) \Pi_n(t, \vec{y})] \right) \\ &= A_{ij} + B_{ij}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung von  $A_{ij}$ . Benutze

$$\begin{aligned} &[\Psi_{\alpha,r}^\dagger(t, \vec{x}) \widehat{\mathcal{O}}_{1,\alpha\beta,rs} \Psi_{\beta,s}(t, \vec{x}), \Psi_{\gamma,t}^\dagger(t, \vec{y}) \widehat{\mathcal{O}}_{2,\gamma\delta,tu} \Psi_{\delta,u}(t, \vec{y})] = \\ &= \widehat{\mathcal{O}}_{1,\alpha\beta,rs} \widehat{\mathcal{O}}_{2,\gamma\delta,tu} [\Psi_{\alpha,r}^\dagger(t, \vec{x}) \Psi_{\beta,s}(t, \vec{x}), \Psi_{\gamma,t}^\dagger(t, \vec{y}) \Psi_{\delta,u}(t, \vec{y})] \quad (6.62) \end{aligned}$$

und drücke den Kommutator mit Fermionfeldern mittels

$$[ab, cd] = a\{b, c\}d - ac\{b, d\} + \{a, c\}db - c\{a, d\}b \quad (6.63)$$

durch Antikommutatoren aus:

$$\begin{aligned} &[\Psi_{\alpha,r}^\dagger(t, \vec{x}) \Psi_{\beta,s}(t, \vec{x}), \Psi_{\gamma,t}^\dagger(t, \vec{y}) \Psi_{\delta,u}(t, \vec{y})] \\ &\stackrel{(6.56, 6.57, 6.63)}{=} \Psi_{\alpha,r}^\dagger(t, \vec{x}) \{ \Psi_{\beta,s}(t, \vec{x}), \Psi_{\gamma,t}^\dagger(t, \vec{y}) \} \Psi_{\delta,u}(t, \vec{y}) \\ &\quad - \Psi_{\gamma,t}^\dagger(t, \vec{y}) \{ \Psi_{\alpha,r}^\dagger(t, \vec{x}), \Psi_{\delta,u}(t, \vec{y}) \} \Psi_{\beta,s}(t, \vec{x}) \\ &\stackrel{(6.55)}{=} \Psi_{\alpha,r}^\dagger(t, \vec{x}) \Psi_{\delta,u}(t, \vec{y}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{\beta\gamma} \delta_{st} - \Psi_{\gamma,t}^\dagger(t, \vec{y}) \Psi_{\beta,s}(t, \vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{\alpha\delta} \delta_{ru}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int d^3x \mathbb{1}_{\alpha\beta} \left( \frac{\tau_i}{2} \right)_{rs} \mathbb{1}_{\gamma\delta} \left( \frac{\tau_j}{2} \right)_{tu} \left( \Psi_{\alpha,r}^\dagger(x) \delta_{\beta\gamma} \delta_{st} \Psi_{\delta,u}(x) - \Psi_{\gamma,t}^\dagger(x) \delta_{\alpha\delta} \delta_{ru} \Psi_{\beta,s}(x) \right) \\ &= \int d^3x \Psi^\dagger(x) \left( \frac{\tau_i}{2} \frac{\tau_j}{2} - \frac{\tau_j}{2} \frac{\tau_i}{2} \right) \Psi(x) \\ &= i\epsilon_{ijk} \int d^3x \Psi^\dagger(x) \frac{\tau_k}{2} \Psi(x). \end{aligned}$$

Für  $B_{ij}$  benutzen wir

$$[ab, cd] = a[b, c]d + ac[b, d] + [a, c]db + c[a, d]b \quad (6.64)$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
& [\Phi_k(t, \vec{x})\Pi_l(t, \vec{x}), \Phi_m(t, \vec{y})\Pi_n(t, \vec{y})] \\
& \stackrel{(6.59, 6.60, 6.64)}{=} \Phi_k(t, \vec{x})[\Pi_l(t, \vec{x}), \Phi_m(t, \vec{y})]\Pi_n(t, \vec{y}) \\
& \quad + \Phi_m(t, \vec{y})[\Phi_k(t, \vec{x}), \Pi_n(t, \vec{y})]\Pi_l(t, \vec{x}) \\
& \stackrel{(6.58)}{=} -i\Phi_k(t, \vec{x})\Pi_n(t, \vec{y})\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\delta_{lm} + i\Phi_m(t, \vec{y})\Pi_l(t, \vec{x})\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\delta_{kn}
\end{aligned}$$

und somit für  $B_{ij}$

$$\begin{aligned}
B_{ij} &= -i\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn} \int d^3x [\Phi_k(x)\Pi_n(x)\delta_{lm} - \Phi_m(x)\Pi_l(x)\delta_{kn}] \\
&= -i \int d^3x [\Phi_k(x)\Pi_n(x)(\delta_{in}\delta_{kj} - \delta_{ij}\delta_{kn}) - \Phi_m(x)\Pi_l(x)(\delta_{lj}\delta_{im} - \delta_{lm}\delta_{ij})] \\
&= -i \int d^3x [\Phi_j(x)\Pi_i(x) - \delta_{ij}\Phi_k(x)\Pi_k(x) - \Phi_i(x)\Pi_j(x) + \delta_{ij}\Phi_m(x)\Pi_m(x)] \\
&= i\epsilon_{ijk} \int d^3x \epsilon_{klm}\Phi_l(x)\Pi_m(x).
\end{aligned}$$

Wir haben benutzt:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}.$$

# Kapitel 7

## Eichtheorien

### 7.1 Lokale Symmetrien

**Motivation 7.1.1** Das Prinzip der lokalen oder Eichsymmetrie wird benutzt, um in so genannten Eichtheorien Dynamik, d. h. Wechselwirkungen zwischen Materiefeldern und Eichfeldern zu erzeugen. Das bekannteste Beispiel ist die QED, die auf der abelschen Gruppe  $U(1)$  basiert. Für den Fall einer abelschen Gruppe besitzen die Eichfelder keine Selbstwechselwirkungen. Nichtabelsche Theorien (z. B. QCD) werden als Yang-Mills-Theorien bezeichnet und beinhalten über die Wechselwirkung der Eichfelder mit den Materiefeldern hinaus auch direkte Wechselwirkungen der Eichfelder untereinander.

Literatur:

- C. - N. Yang und R. L. Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954)
- E. S. Abers und B. W. Lee, Phys. Rept. **9**, 1 (1973)
- L. O’Raifeartaigh, *Group Structure of Gauge Theories* (Cambridge University Press, Cambridge 1986)
- H. Georgi, *Weak Interactions and Modern Particle Theory* (Benjamin/Cummings, Menlo Park 1984), Kapitel 1.3
- T.-P. Cheng and L.-F. Li, *Gauge theory of elementary particle physics* (Clarendon, Oxford 1984), Kapitel 8
- C. Itzykson and J. - B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York 1980), Kapitel 11

#### 7.1.1 QED

**Herleitung 7.1.2 der QED-Lagrange-Dichte.** Wir starten mit der Lagrange-Dichte eines freien Elektrons,

$$\mathcal{L}_0(\Psi, \partial_\mu \Psi) = \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m)\Psi, \quad (7.1)$$

die invariant bezüglich einer *globalen* U(1)-Transformation ist:

$$\begin{aligned}\Psi(x) &\mapsto \Psi'(x) = e^{-i\alpha}\Psi(x), \\ \bar{\Psi}(x) &\mapsto \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)e^{i\alpha},\end{aligned}$$

wobei  $\alpha \in [0, 2\pi]$  nicht von  $x$  abhängt. Denn:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}\Psi &\mapsto \bar{\Psi} \underbrace{e^{i\alpha}e^{-i\alpha}}_1 \Psi = \bar{\Psi}\Psi, \\ \bar{\Psi}\gamma_\mu\partial^\mu\Psi &\mapsto \bar{\Psi}e^{i\alpha}\gamma_\mu\partial^\mu e^{-i\alpha}\Psi = \bar{\Psi}e^{i\alpha}e^{-i\alpha}\gamma_\mu\partial^\mu\Psi = \bar{\Psi}\gamma_\mu\partial^\mu\Psi.\end{aligned}$$

Wir betrachten nun eine infinitesimale Transformation

$$\Psi(x) \mapsto \Psi(x) - i\epsilon\Psi(x)$$

und benutzen den Gell-Mann-Lévy-Trick der Ersetzung  $\epsilon \rightarrow \epsilon(x)$ , um den erhaltenen Strom zu identifizieren:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_0 &= -i\partial_\mu\epsilon(x)i\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x) = \partial_\mu\epsilon(x)\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x). \\ \Rightarrow J^\mu &= \frac{\partial\delta\mathcal{L}_0}{\partial\partial_\mu\epsilon} = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\end{aligned}\tag{7.2}$$

mit dem Ladungsoperator

$$Q = \int d^3x : \Psi^\dagger(t, \vec{x})\Psi(t, \vec{x}) : .$$

$Q$  lässt sich als Elektronenzahloperator interpretieren.

---

Mit Hilfe der Quantisierung des Dirac-Feldes findet man für den Ladungsoperator

$$Q = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})} [b_r^\dagger(\vec{p})b_r(\vec{p}) - d_r^\dagger(\vec{p})d_r(\vec{p})].$$

Das Minuszeichen für den Beitrag der Antiteilchen ist mit der Normalordnungsvorschrift verknüpft. Jede Vertauschung zweier Fermi-Felder auf dem Weg zur Normalordnung produziert einen Faktor  $(-1)$ . Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}Q|e^-(\vec{p}, r)\rangle &= Qb_r^\dagger(\vec{p})|0\rangle = ([Q, b_r^\dagger(\vec{p})] + b_r^\dagger(\vec{p})Q)|0\rangle = +1|e^-(\vec{p}, r)\rangle, \\ Q|e^+(\vec{p}, r)\rangle &= Qd_r^\dagger(\vec{p})|0\rangle = -1|e^+(\vec{p}, r)\rangle.\end{aligned}$$

Dabei haben wir von

$$\begin{aligned}[Q, b_r^\dagger(\vec{p})] &= b_r^\dagger(\vec{p}), \\ [Q, d_r^\dagger(\vec{p})] &= -d_r^\dagger(\vec{p}),\end{aligned}$$

Gebrauch gemacht. Wir zeigen exemplarisch die erste Relation:

$$[Q, b_r^\dagger(\vec{p})] = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E(\vec{q})} [b_s^\dagger(\vec{q})b_s(\vec{q}) - d_s^\dagger(\vec{q})d_s(\vec{q}), b_r^\dagger(\vec{p})].$$

Benutze (Fermionen!)

$$[ab, c] = a\{b, c\} - \{a, c\}b$$

zusammen mit den Antikommutatorrelationen:

$$\begin{aligned} \dots &= \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E(\vec{q})} b_s^\dagger(\vec{q})(2\pi)^3 2E(\vec{q}) \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) \delta_{sr} \\ &= b_r^\dagger(\vec{p}). \end{aligned}$$

Beachte, dass vom zweiten Kommutator gar nichts beiträgt. Da Vernichtungsoperatoren den Grundzustand vernichten, haben wir  $Q|0\rangle = 0$ .

- Gesucht wird eine Verallgemeinerung der Ableitung  $\partial_\mu \Psi(x)$  dergestalt, dass  $\mathcal{L}_0$  auch invariant bzgl. lokaler Transformationen ist.

Um der per Konvention negativen elektrischen Ladung des Elektrons ( $q_e = -1$ ) Rechnung zu tragen, betrachten wir im Sinne der Darstellungstheorie die Zuordnung

$$U(1) \ni e^{-i\alpha} \mapsto e^{-i\alpha q_e} = e^{i\alpha}$$

und gehen von folgender lokaler Transformation aus:

$$\Psi(x) \mapsto e^{i\alpha(x)} \Psi(x).$$

Man führt eine so genannte **kovariante Ableitung**  $D_\mu \Psi(x)$  ein mit der Eigenschaft

$$D_\mu \Psi(x) \mapsto [D_\mu \Psi(x)]' = D'_\mu \Psi'(x) \stackrel{!}{=} e^{i\alpha(x)} D_\mu \Psi(x), \quad (7.3)$$

oder, in Worten ausgedrückt: Die kovariante Ableitung eines Objektes soll genauso transformieren wie das Objekt selbst. Zu diesem Zweck führt man ein so genanntes Eichfeld  $\mathcal{A}_\mu(x)$  ein, mit der Forderung

$$\mathcal{A}_\mu(x) \mapsto \mathcal{A}'_\mu(x) = \mathcal{A}_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x), \quad e > 0, \quad (7.4)$$

so dass sich ergibt:

$$\begin{aligned} D_\mu \Psi(x) &:= [\partial_\mu - ie\mathcal{A}_\mu(x)]\Psi(x) \\ &\mapsto D'_\mu \Psi'(x) \\ &= [\partial_\mu - ie\mathcal{A}_\mu(x) - i\partial_\mu \alpha(x)] [e^{i\alpha(x)} \Psi(x)] \\ &= e^{i\alpha(x)} [\partial_\mu + i\partial_\mu \alpha(x) - ie\mathcal{A}_\mu(x) - i\partial_\mu \alpha(x)] \Psi(x) \\ &= e^{i\alpha(x)} [\partial_\mu - ie\mathcal{A}_\mu(x)] \Psi(x). \end{aligned} \quad (7.5)$$



Damit erhalten wir als neue Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_0(\Psi, D_\mu \Psi) = \bar{\Psi}(i\mathcal{D} - m)\Psi = \mathcal{L}_0(\Psi, \partial_\mu \Psi) + e\bar{\Psi}\gamma^\mu \mathcal{A}_\mu \Psi, \quad (7.6)$$

die nun invariant bzgl. so genannter Eichtransformationen der zweiten Art

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\mapsto e^{i\alpha(x)}\Psi(x), \\ \mathcal{A}_\mu(x) &\mapsto \mathcal{A}_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \end{aligned} \quad (7.7)$$

ist. Die Bewegungsgleichung für  $\Psi$  ergibt sich aus

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\Psi}} = i\mathcal{D}\Psi - m\Psi = (i\mathcal{D} + e\mathcal{A} - m)\Psi = 0. \quad (7.8)$$

Ist  $\Psi_{\mathcal{A}}(x)$  Lösung der Bewegungsgleichung in Anwesenheit eines vorgegebenen  $\mathcal{A}_\mu$ , so ist

$$\Psi_{\mathcal{A}'}(x) := e^{i\alpha(x)}\Psi_{\mathcal{A}}(x)$$

Lösung der Bewegungsgleichung in Anwesenheit von  $\mathcal{A}'_\mu = \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu\alpha/e$ .  
Denn:

$$\begin{aligned} (i\mathcal{D} + e\mathcal{A} + \partial_\mu\alpha\gamma^\mu - m)\Psi_{\mathcal{A}'} &= (i\mathcal{D}' - m)e^{i\alpha(x)}\Psi_{\mathcal{A}}(x) \\ &\stackrel{(7.3)}{=} e^{i\alpha(x)}(i\mathcal{D} - m)\Psi_{\mathcal{A}}(x) = 0. \end{aligned}$$

Es sei

$$\begin{aligned} M &= \{(\mathcal{A}_\mu, \Psi_{\mathcal{A}}) | \mathcal{A}_\mu \text{ vorgegebenes Eichfeld} \\ &\quad \wedge \Psi_{\mathcal{A}} \text{ Lösung der Bewegungsgleichung in Anwesenheit von } \mathcal{A}_\mu\}. \end{aligned}$$

Im Sinne der Gruppentheorie definieren Gl. (7.7) eine Operation  $A$  (siehe 1.3.1) der (lokalen) Gruppe  $U(1)$  auf  $M$ , wobei deren Elemente glatt von Punkt zu Punkt im Minkowski-Raum variieren dürfen, d. h.  $\alpha \rightarrow \alpha(x)$ :

$$A[\alpha(x), (\mathcal{A}_\mu(x), \Psi_{\mathcal{A}}(x))] := (\mathcal{A}_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)/e, e^{i\alpha(x)}\Psi_{\mathcal{A}}(x)).$$

Denn:

1.

$$A[0, (\mathcal{A}_\mu(x), \Psi_{\mathcal{A}}(x))] = (\mathcal{A}_\mu(x), \Psi_{\mathcal{A}}(x)).$$

2.

$$\begin{aligned} &A[\alpha_1(x), A[\alpha_2(x), (\mathcal{A}_\mu(x), \Psi_{\mathcal{A}}(x))]] \\ &= A[\alpha_1(x), (\mathcal{A}_\mu(x) + \partial_\mu\alpha_2(x)/e, e^{i\alpha_2(x)}\Psi_{\mathcal{A}}(x))] \\ &= (\mathcal{A}_\mu(x) + \partial_\mu\alpha_2(x)/e + \partial_\mu\alpha_1(x)/e, e^{i(\alpha_1(x)+\alpha_2(x))}\Psi_{\mathcal{A}}(x)) \\ &= A[\alpha_1(x) + \alpha_2(x), (\mathcal{A}_\mu(x), \Psi_{\mathcal{A}}(x))]. \end{aligned}$$

Nun wollen wir das Feld  $\mathcal{A}_\mu$  noch als dynamische Variable interpretieren, indem wir zusätzlich einen „kinetischen“ Term einführen. Wir definieren

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$$

und erhalten schließlich die **Lagrange-Dichte der QED**:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\Psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu - ie \mathcal{A}_\mu) \Psi - m \bar{\Psi} \Psi - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}. \quad (7.9)$$

Das dynamische Eichfeld wird nach Quantisierung mit dem Photon identifiziert.

**Anmerkungen 7.1.3** 1. Ein Massenterm

$$\frac{1}{2} M^2 \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu$$

würde die Eichinvarianz zerstören:

$$\frac{1}{2} M^2 \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu \mapsto \frac{1}{2} M^2 (\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu + \frac{2}{e} \partial_\mu \alpha \mathcal{A}^\mu + \frac{1}{e^2} \partial_\mu \alpha \partial^\mu \alpha) \neq \frac{1}{2} M^2 \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu.$$

Eichbosonen sind masselos!

2. Die Kopplung des Photons an Materiefelder wird durch deren Transformationsverhalten bzgl. U(1) diktiert. Schreiben wir einem Materiefeld  $\Psi_q$  die Ladung  $q$  in Einheiten der Elementarladung zu, d. h.

$$\Psi_q(x) \mapsto e^{-iq\alpha} \Psi_q(x),$$

dann erhalten wir die so genannte minimale Substitution ( $\partial_\mu \mapsto \partial_\mu + ieq \mathcal{A}_\mu$ )

$$D_\mu \Psi_q(x) = [\partial_\mu + ieq \mathcal{A}_\mu(x)] \Psi_q(x).$$

Beispiele:

- Elektron:  $q = -1$
- Proton:  $q = +1$
- Neutron:  $q = 0$
- up-Quark:  $q = 2/3$
- usw.

Die Quantisierung der Ladung lässt sich allein aus der QED nicht erklären.

3. Das Eichprinzip erzeugt auf einfache Weise eine Wechselwirkung zwischen dem elektromagnetischen Feld und Materie:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -(-e) \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \mathcal{A}_\mu = -J^\mu \mathcal{A}_\mu.$$

4. Die Forderung nach Renormierbarkeit der Theorie im traditionellen Sinne schließt andere eichinvariante Kopplungen wie z. B. Wechselwirkung mit einem anomalen magnetischen Moment

$$-\frac{e\kappa}{4m}\mathcal{F}_{\mu\nu}\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu],$$

aus. Dies ist kein gruppentheoretisches Argument!

5. Wegen der zugrunde liegenden abelschen Symmetrie koppelt das Photon nicht direkt an sich selbst.

## 7.1.2 Yang-Mills-Theorien

Gegeben sei eine Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_0(\Phi, \partial_\mu\Phi), \quad \Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n), \quad (7.10)$$

die invariant bzgl. einer globalen Transformation der „Materie-Felder“  $\Phi$  ist. Die zugrunde liegende Symmetriegruppe  $G$  sei eine kompakte Lie-Gruppe mit  $r$  abstrakten infinitesimalen Generatoren  $X_a$  und Strukturkonstanten  $C_{abc}$  der Lie-Algebra. Zur Erinnerung: Aus Satz 3.2.4 folgt, dass jede endlichdimensionale Darstellung einer kompakten Lie-Gruppe äquivalent zu einer unitären Darstellung ist und vollständig in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen zerlegt werden kann. Wir denken dabei typischerweise an die Gruppen  $SU(N)$  oder  $SO(N)$ , die jeweils durch  $r = N^2 - 1$  bzw.  $r = N(N - 1)/2$  infinitesimale Generatoren gekennzeichnet sind. Denkbar sind auch Symmetriegruppen aus direkten Produkten.

Es sei  $g$  ein Gruppenelement (der Zusammenhangskomponente  $G_0$  von  $G$ , siehe 3.1.13), das wir mittels der reellen Parameter  $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_r)$  charakterisieren. Die Felder  $\Phi$  sollen folgendermaßen bzgl. einer vollständig reduziblen Darstellung (blockdiagonale Matrixform) transformieren:

$$\begin{aligned} U : g &\mapsto U(g) = \exp(-i\Theta_a T_a), \\ \Phi(x) &\mapsto \Phi'(x) = U(g)\Phi(x). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Die  $(n, n)$ -Matrizen  $T_a$ ,  $a = 1, \dots, r$ , sind hermitesch ( $U$  unitär) und erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[T_a, T_b] = iC_{abc}T_c. \quad (7.12)$$

Für ein Gruppenelement in der „Nähe“ der Identität  $e$  schreiben wir

$$g = e - i\epsilon_a X_a \quad (7.13)$$

und ordnen diesem die infinitesimale, lineare Transformation

$$U(g) = (1 - i\epsilon_a T_a) : \Phi(x) \mapsto (1 - i\epsilon_a T_a)\Phi(x) \quad (7.14)$$

zu.

- Was passiert, wenn wir wieder für jedes  $x$  ein unterschiedliches  $g$  erlauben, d. h.  $g \mapsto g(x)$  ersetzen und nach wie vor Invarianz von  $\mathcal{L}$  fordern, aber nun bzgl.  $\Phi(x) \mapsto U[g(x)]\Phi(x)$ ?

Wie in den vorherigen Beispielen gesehen treten für lokale  $\epsilon_a(x)$  Zusatzterme in  $\delta\mathcal{L}$  auf, die ihren Ursprung in den partiellen Ableitungen

$$\partial_\mu \delta\Phi(x) = \underbrace{-i\partial_\mu \epsilon_a(x) T_a \Phi(x)}_{\text{„problematischer“ Term}} - i\epsilon_a(x) T_a \partial_\mu \Phi(x) \quad (7.15)$$

haben. In Analogie zur QED führt man eine kovariante Ableitung ein, mit der Eigenschaft [vgl. Gl. (7.3)]

$$D_\mu \Phi(x) \mapsto [D_\mu \Phi(x)]' = D'_\mu \Phi'(x) \stackrel{!}{=} [1 - i\epsilon_a(x) T_a] D_\mu \Phi(x), \quad (7.16)$$

d. h. die kovariante Ableitung der Felder soll wie die Felder selbst transformieren. Für diese kovariante Ableitung machen wir einen Ansatz wie in der QED

$$D_\mu \Phi(x) = [\partial_\mu + ig T_a \mathcal{A}_{a\mu}(x)] \Phi(x), \quad (7.17)$$

wobei wir für jeden Generator  $X_a$  der abstrakten Gruppe ein Eichfeld  $\mathcal{A}_{a\mu}$  einführen.

- Welche Transformationseigenschaften müssen wir von den Eichfeldern fordern?

Wir definieren

$$\tilde{O} = T_a O_a. \quad (7.18)$$

Es sei  $\tilde{O}$  eine  $(n, n)$ -Matrix vom Typ Gl. (7.18). Mit einer geschickten Wahl der  $T_a$  lässt sich  $O_a$  aus  $\tilde{O}$  herausprojizieren. Für

$$\kappa \text{Tr}(T_a T_b) = \delta_{ab}$$

gilt

$$O_a = \kappa \text{Tr}(T_a \tilde{O}). \quad (7.19)$$

- Beispiel:  $\tilde{O}$  sei eine hermitesche  $(2, 2)$ -Matrix mit Spur Null. Wir schreiben  $\tilde{O} = O_a \tau_a$ ,  $O_a \in \mathbb{R}$ . Mit

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(\tau_a \tau_b) = \delta_{ab}$$

finden wir

$$O_a = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tau_a \tilde{O}).$$

Mit Hilfe von Gl. (7.18) schreiben wir für die kovariante Ableitung

$$D_\mu \Phi(x) = [\partial_\mu + ig\tilde{\mathcal{A}}_\mu(x)]\Phi(x) \quad (7.20)$$

und finden aus der Forderung Gl. (7.16)

$$(\partial_\mu + ig\tilde{\mathcal{A}}_\mu + ig\delta\tilde{\mathcal{A}}_\mu)[(1 - i\tilde{\epsilon})\Phi(x)] = (1 - i\tilde{\epsilon})(\partial_\mu + ig\tilde{\mathcal{A}}_\mu)\Phi(x)$$

durch Vergleich der linearen „kleinen“ Terme die Bedingung

$$-i\partial_\mu\tilde{\epsilon} + g\tilde{\mathcal{A}}_\mu\tilde{\epsilon} + ig\delta\tilde{\mathcal{A}}_\mu = g\tilde{\epsilon}\tilde{\mathcal{A}}_\mu$$

oder

$$\delta\tilde{\mathcal{A}}_\mu = i[\tilde{\mathcal{A}}_\mu, \tilde{\epsilon}] + \frac{1}{g}\partial_\mu\tilde{\epsilon}. \quad (7.21)$$

- Zunächst sieht es in Gl. (7.21) so aus, als sei das Transformationsverhalten der Eichfelder von der *Darstellung*  $T_a$  abhängig. Dass dem nicht so ist, verifiziert man mit Hilfe von Gl. (7.12) und der Projektionsvorschrift aus Gl. (7.19). In das Transformationsverhalten geht über die Strukturkonstanten  $C_{abc}$  nur die Struktur der Gruppe ein (siehe Übung 23, Aufgabe 3 (a)).
- Als Zwischenergebnis haben wir erreicht, dass die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_0(\Phi, D_\mu\Phi) \quad (7.22)$$

mit  $D_\mu\Phi = (\partial_\mu + ig\tilde{\mathcal{A}}_\mu)\Phi$  invariant ist bzgl. der lokalen Transformation

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\mapsto \exp[-i\Theta_a(x)T_a]\Phi(x) = \exp[-i\tilde{\Theta}(x)]\Phi(x) \\ &=: U[g(x)]\Phi(x), \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_\mu(x) = T_a\mathcal{A}_{a\mu}(x) \mapsto UT_a\mathcal{A}_{a\mu}(x)U^\dagger + \frac{i}{g}\partial_\mu UU^\dagger. \quad (7.24)$$

Mit dem Eichprinzip haben wir eine Wechselwirkung zwischen Materie- und Eichfeldern erzeugt. Allerdings sind die Eichbosonen bisher keine wirklichen dynamischen Freiheitsgrade, da wir noch nicht den kinetischen Anteil berücksichtigt haben. In Analogie zur QED bietet sich ein Ausdruck der Form

$$-\frac{1}{4}\mathcal{F}_{a\mu\nu}\mathcal{F}_a^{\mu\nu} \quad (7.25)$$

an, vorausgesetzt die Tensoren  $\mathcal{F}_{a\mu\nu}$  transformieren bzgl. der adjungierten Darstellung.

- Damit ist folgendes gemeint.

Es seien  $T_a^{\text{ad}}$  die Matrizen für die Generatoren in der adjungierten Darstellung, d. h. es handelt sich um  $(r, r)$ -Matrizen mit der Eigenschaft  $(T_a^{\text{ad}})_{bc} = -iC_{abc}$  (siehe Übung 12, Aufgabe 2). Wir sagen, dass die Felder  $F_a$ ,  $a = 1, \dots, r$ , bzgl. der adjungierten Darstellung transformieren, wenn gilt:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_r \end{pmatrix} =: F \mapsto (1 - i\epsilon_c T_c^{\text{ad}})F \quad (7.26)$$

oder in Komponentenschreibweise

$$F_a \mapsto F_a - i\epsilon_c (T_c^{\text{ad}})_{ab} F_b = F_a - \epsilon_c C_{cab} F_b = F_a + \epsilon_c C_{acb} F_b = F_a + C_{abc} \epsilon_b F_c. \quad (7.27)$$

Wenn man zunächst mit dem naiven Ansatz

$$\partial_\mu \mathcal{A}_{a\nu} - \partial_\nu \mathcal{A}_{a\mu}$$

beginnt, dann ergibt sich nicht das richtige Transformationsverhalten (siehe Übung 23, Aufgabe 2 (b)). Vielmehr muss man noch einen zusätzlichen Term einführen

$$\mathcal{F}_{a\mu\nu} := \partial_\mu \mathcal{A}_{a\nu} - \partial_\nu \mathcal{A}_{a\mu} - gC_{abc} \mathcal{A}_{b\mu} \mathcal{A}_{c\nu}, \quad (7.28)$$

so dass Gl. (7.27) erfüllt ist (siehe Übung 23, Aufgabe 2 (c)). Insgesamt ergibt sich also als Lagrange-Dichte der Eichtheorie

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\Phi, D_\mu \Phi) - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{a\mu\nu} \mathcal{F}_a^{\mu\nu}. \quad (7.29)$$

Anmerkungen:

- Massenterme der Art

$$\frac{1}{2} M_a^2 \mathcal{A}_{a\mu} \mathcal{A}_a^\mu$$

verletzen die Eichinvarianz. Aus dem Prinzip der Eichsymmetrie folgt also, dass Eichbosonen masselos sind.

- Wenn eine nichtabelsche Gruppe zugrunde liegt, treten in der Definition der Feldstärken, Gl. (7.28), in den Eichfeldern quadratische Terme auf. Deshalb enthält die Lagrange-Dichte in Gl. (7.29) Wechselwirkungsterme mit drei und vier Eichfeldern. Insbesondere tritt in der Wechselwirkung der Eichfelder mit den Materiefeldern dieselbe Kopplungskonstante auf wie bei der Wechselwirkung der Eichfelder untereinander.
- Ist die Gruppe  $G$  das direkte Produkt mehrerer Untergruppen,  $G = G_1 \times \dots \times G_k$ , muss man mit jeder Untergruppe  $G_i$  eine unabhängige Kopplungskonstante  $g_i$  verknüpfen.

Beispiel: Die Eichgruppe des Standardmodells ist

$$\underbrace{\text{SU}(3)_c}_{\text{starke Ww}} \times \underbrace{\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y}_{\text{elektroschwache Ww}}$$

mit drei Eichkopplungen

$$\begin{aligned} g_3 &\leftrightarrow \text{SU}(3)_c, \\ g &\leftrightarrow \text{SU}(2)_L, \\ g' &\leftrightarrow \text{U}(1)_Y. \end{aligned}$$

## 7.2 Die Lagrange-Dichte der Quantenchromodynamik

Originalliteratur zur QCD:

- D. J. Gross und F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973)
- S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **31**, 494 (1973)
- H. Fritzsch, M. Gell-Mann und H. Leutwyler, Phys. Lett. B **47**, 365 (1973)
- D. J. Gross und F. Wilczek, Phys. Rev. D **8**, 3633 (1973)
- H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973)
- S. R. Coleman und D. J. Gross, Phys. Rev. Lett. **31**, 851 (1973)
- A. Zee, Phys. Rev. D **7**, 3630 (1973)

Lehrbücher und Übersichtsartikel:

- T.-P. Cheng und L.-F. Li, *Gauge theory of elementary particle physics*, Clarendon, Oxford 1984, Kapitel 10
- J. F. Donoghue, E. Golowich, B. R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model*, Cambridge University Press, Cambridge 1992, Kapitel II-2
- W. Marciano und H. Pagels, Phys. Rep. **36**, 137 (1978)
- G. Altarelli, Phys. Rep. **81**, 1 (1982)
- F. Scheck, *Electroweak and Strong Interactions*, Springer, Berlin 1996, Kapitel 3.5

Die QCD ist eine nichtabelsche Eichtheorie mit einer lokalen Symmetriegruppe  $G = SU(3)$ . Bei den Materiefeldern, den so genannten Quarks, handelt es sich um Fermionen mit Spin  $1/2$ , die in sechs verschiedenen *flavors* vorkommen (siehe Abschnitt 5.1). Für jeden Quarkflavor  $f$  führen wir ein komplexwertiges dreikomponentiges Objekt

$$q_f = \begin{pmatrix} q_{f,\text{rot}} \\ q_{f,\text{grün}} \\ q_{f,\text{blau}} \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

ein, das bzgl. einer mit dem Gruppenelement  $g(x)$  assoziierten lokalen Transformation wie

$$q_f \mapsto q'_f = \exp \left[ -i \sum_{a=1}^8 \Theta_a(x) \frac{\lambda_a^c}{2} \right] q_f = U[g(x)]q_f \quad (7.31)$$

transformieren soll ( $c$  für *color*). Wegen des Spins  $1/2$  ist jeder Eintrag von  $q_f$ , z. B.  $q_{f,\text{rot}}$ , selbst ein vierkomponentiger Dirac-Spinor [vgl. mit  $\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ ]. Bei den  $\lambda_a^c$  handelt es sich um die Gell-Mann-Matrizen (siehe Abschnitt 5.4). Wir führen folgende Bezeichnung für die Quarkfeldkomponenten ein:

$$q_{f,A,\alpha}$$

mit  $f = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ : Flavorindex (u, d, s, c, b, t),  $A = 1, 2, 3$ : Farbindex (rot, grün, blau),  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ : Dirac-Spinorindex. Die nach dem in Abschnitt 7.1.2 beschriebenen Verfahren konstruierte Lagrange-Dichte der QCD lautet (ausführliche Schreibweise)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} = & \sum_{f,f'=1}^6 \sum_{A,A'=1}^3 \sum_{\alpha,\alpha'=1}^4 \bar{q}_{f,A,\alpha} \left[ (\gamma_{\alpha\alpha'}^\mu i\partial_\mu - m_f \delta_{\alpha\alpha'}) \delta_{AA'} \right. \\ & \left. - g_3 \underbrace{\sum_{a=1}^8 \mathcal{A}_{a\mu} \frac{\lambda_{a,AA'}^c}{2} \gamma_{\alpha\alpha'}^\mu}_{\text{aus dem Eichprinzip}} \right] \delta_{ff'} q_{f',A',\alpha'} - \sum_{a=1}^8 \frac{1}{4} \mathcal{G}_{a\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Kurzschreibweise:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{f=\substack{u,d,s, \\ c,b,t}} \bar{q}_f (i\mathcal{D} - m_f) q_f - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{a\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\mu\nu}. \quad (7.32)$$

Extreme Kurzschreibweise:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{q} (i\mathcal{D} - \mathcal{M}) q - \frac{1}{2} \text{Tr}_c(\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}).$$



(Wir folgen der Literatur und schreiben  $\mathcal{G}^{\mu\nu}$  anstelle von  $\tilde{\mathcal{G}}^{\mu\nu}$ .) Die kovariante Ableitung enthält wegen der Gruppe SU(3) acht Eichfelder,

$$D_\mu \begin{pmatrix} q_{f,\text{rot}} \\ q_{f,\text{grün}} \\ q_{f,\text{blau}} \end{pmatrix} = \partial_\mu \begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \end{pmatrix} + ig_3 \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a^c}{2} \mathcal{A}_{a\mu} \begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \end{pmatrix}, \quad (7.33)$$

wobei wir auf der rechten Seite von Gl. (7.33) den flavor-Index unterdrückt und  $r$  für rot usw. geschrieben haben. Insbesondere ist die Wechselwirkung der Quarks mit den so genannten Gluonen flavorunabhängig. Damit Gl. (7.32) lokal invariant ist, müssen die acht Eichfelder wie (Einstein'sche Summenkonvention)

$$\mathcal{A}_\mu(x) := \frac{\lambda_a^c}{2} \mathcal{A}_{a\mu}(x) \mapsto U[g(x)] \mathcal{A}_\mu(x) U^\dagger[g(x)] + \frac{i}{g_3} \partial_\mu U[g(x)] U^\dagger[g(x)] \quad (7.34)$$

oder kurz

$$\mathcal{A}_\mu \mapsto U \mathcal{A}_\mu U^\dagger + \frac{i}{g_3} \partial_\mu U U^\dagger$$

transformieren. Ferner haben wir 8 Feldstärketensoren

$$\mathcal{G}_{a\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_{a\nu} - \partial_\nu \mathcal{A}_{a\mu} - g_3 f_{abc} \mathcal{A}_{b\mu} \mathcal{A}_{c\nu} \quad (7.35)$$

definiert, die wie

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(x) := \frac{\lambda_a^c}{2} \mathcal{G}_{a\mu\nu}(x) \mapsto U[g(x)] \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) U^\dagger[g(x)] \quad (7.36)$$

transformieren.

## 7.3 Zufällige globale Symmetrien von $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$

Die sechs Quarkflavors lassen sich in zwei Gruppen unterteilen, die so genannten leichten und schweren Quarks (siehe Abschnitt 5.1). Wir beschränken uns im Folgenden auf die drei leichtesten Quarks. Wenn wir die Masse des Protons,  $m_p = 938$  MeV, betrachten, dann gilt

$$m_p \gg 2m_u + m_d, \quad (7.37)$$

so dass für die Erzeugung von Hadronenmassen offensichtlich ein komplexer Mechanismus verantwortlich ist.

### 7.3.1 Chiraler Grenzfall

Insbesondere legt Gl. (7.37) nahe, den Grenzfall  $m_u, m_d, m_s \rightarrow 0$  (chiraler Grenzfall, Chiralität = Händigkeit) als Ausgangspunkt für Symmetrieüberlegungen zu betrachten:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{f=u,d,s} i \bar{q}_f \not{D} q_f - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{a\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\mu\nu} + \text{schwere Quarks}. \quad (7.38)$$

Im Folgenden werden wir die schweren Quarks vernachlässigen. Die kovariante Ableitung  $\not{D} q_f$  wirkt auf die Farb- und Dirac-Indizes, ist aber unabhängig vom flavor. Um die globalen Symmetrien von Gl. (7.38) vollständig zu identifizieren betrachten wir die Matrix  $\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5^\dagger$ ,  $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ ,  $\gamma_5^2 = \mathbb{1}$  und führen Projektionsoperatoren ein:

$$q = \left[ \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5) + \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5) \right] q = [P_R + P_L] q =: q_R + q_L, \quad (7.39)$$

wobei die Indizes  $R$  und  $L$  für rechts und links stehen. Die  $(4, 4)$ -Matrizen  $P_R$  und  $P_L$  haben die Eigenschaften (Überprüfen!)

$$P_R + P_L = \mathbb{1}, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L^2 = P_L, \quad P_R P_L = P_L P_R = 0. \quad (7.40)$$

Für wechselwirkungsfreie Quarks gibt es eine anschauliche Interpretation für die Wirkung der Operatoren  $P_{R/L}$ . Wir betrachten eine hochrelativistische Lösung positiver Energie  $E \gg m$  mit Impuls  $\vec{p}$  und Spinprojektion in positiver/negativer Impulsrichtung,

$$u^{(r)}(\vec{p}) = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi_r \end{pmatrix},$$

d. h. mit positiver bzw. negativer Helizität,

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \chi_{\pm} &= \pm \chi_{\pm}, \\ u_{\pm}(\vec{p}) &\stackrel{E \gg m}{\approx} \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_{\pm} \\ \pm \chi_{\pm} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von ( $\mathbb{1} = \mathbb{1}_{2 \times 2}$ )

$$P_R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

finden wir

$$\begin{aligned} P_R u_+ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_+ \end{pmatrix} = \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_+ \end{pmatrix} = u_+, \\ P_L u_+ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_+ \end{pmatrix} = 0, \\ P_R u_- &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_- \\ -\chi_- \end{pmatrix} = 0, \\ P_L u_- &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_- \\ -\chi_- \end{pmatrix} = u_-. \end{aligned}$$

Die Operatoren  $P_{R/L}$  projizieren also die rechts- und linkshändigen Anteile aus einer freien (masselosen) Lösung. Wir machen nun Gebrauch von

$$\bar{q} \Gamma_i q = \begin{cases} \bar{q}_R \Gamma_1 q_R + \bar{q}_L \Gamma_1 q_L & \text{für } \Gamma_1 \in \{\gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5\} \\ \bar{q}_R \Gamma_2 q_L + \bar{q}_L \Gamma_2 q_R & \text{für } \Gamma_2 \in \{\mathbb{1}, \gamma_5, \sigma^{\mu\nu}\} \end{cases}, \quad (7.41)$$

mit

$$\bar{q}_R = q_R^\dagger \gamma_0 = q^\dagger P_R^\dagger \gamma_0 = q^\dagger P_R \gamma_0 = q^\dagger \gamma_0 P_L = \bar{q} P_L \quad \text{und} \quad \bar{q}_L = \bar{q} P_R.$$

Zum Beweis schreiben wir

$$\bar{q} \Gamma_i q = \bar{q} (P_R + P_L) \Gamma_i (P_R + P_L) q$$

und benutzen

1.  $\{\Gamma_1, \gamma_5\} = 0$ ,
2.  $[\Gamma_2, \gamma_5] = 0$ .

Damit gilt mit Gl. (7.40)

1.  $P_R \Gamma_1 P_R = \Gamma_1 P_L P_R = 0$ ,  $P_L \Gamma_1 P_L = \Gamma_1 P_R P_L = 0$ ,
2.  $P_R \Gamma_2 P_L = \Gamma_2 P_R P_L = 0$ ,  $P_L \Gamma_2 P_R = \Gamma_2 P_L P_R = 0$ .

Jetzt können wir für die QCD-Lagrange-Dichte im chiralen Grenzfall schreiben ( $\gamma^\mu \in \Gamma_1$ )

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{f=u,d,s} (\bar{q}_{R,f} i \not{D} q_{R,f} + \bar{q}_{L,f} i \not{D} q_{L,f}) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{a\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\mu\nu}. \quad (7.42)$$

Diese Lagrange-Dichte besitzt eine *globale*, klassische  $U(3)_L \times U(3)_R$ -Symmetrie, d. h. sie ist invariant bzgl.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} &\mapsto U_L \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} = \exp \left( -i \sum_{a=1}^8 \Theta_a^L \frac{\lambda_a^f}{2} \right) e^{-i\Theta^L} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} &\mapsto U_R \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} = \exp \left( -i \sum_{a=1}^8 \Theta_a^R \frac{\lambda_a^f}{2} \right) e^{-i\Theta^R} \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.43)$$

wobei  $U_L$  und  $U_R$  unabhängige, unitäre  $(3, 3)$ -Matrizen sind ( $f$  für *flavor*). Wir erwarten insgesamt  $2 \times (8 + 1) = 18$  erhaltene Ströme, die wir mittels Gl. (6.6) bestimmen. Die Variation der Lagrange-Dichte lautet

$$\delta \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \bar{q}_R \left( \sum_{a=1}^8 \partial_\mu \Theta_a^R \frac{\lambda_a^f}{2} + \partial_\mu \Theta^R \right) \gamma^\mu q_R + \bar{q}_L \left( \sum_{a=1}^8 \partial_\mu \Theta_a^L \frac{\lambda_a^f}{2} + \partial_\mu \Theta^L \right) \gamma^\mu q_L, \quad (7.44)$$

so dass

$$\begin{aligned} L_a^\mu &= \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a^f}{2} q_L, & \partial_\mu L_a^\mu &= 0, \\ R_a^\mu &= \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a^f}{2} q_R, & \partial_\mu R_a^\mu &= 0, \\ L^\mu &= \bar{q}_L \gamma^\mu q_L, & \partial_\mu L^\mu &= 0, \\ R^\mu &= \bar{q}_R \gamma^\mu q_R, & \partial_\mu R^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Anmerkung: Eine Summation über Farbindizes ist in Gl. (7.44) und (7.45) impliziert, d. h. mit der Einstein'schen Summenkonvention lautet die ausführliche Schreibweise

$$L_a^\mu = \bar{q}_{L f, A, \alpha} \gamma_{\alpha \alpha'}^\mu \frac{\lambda_{a f f'}}{2} \delta_{AA'} q_{L f', A', \alpha'}, \quad \text{usw.}$$

Anstelle dieser Ströme benutzt man häufig die Linearkombinationen

$$V_a^\mu = R_a^\mu + L_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a^f}{2} q, \quad (7.46)$$

$$A_a^\mu = R_a^\mu - L_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a^f}{2} q. \quad (7.47)$$

Begründung (Gell-Mann-Matrizen unterdrückt, da für Argumentation nicht relevant):

$$\begin{aligned} V^\mu &= \bar{q}_R \gamma^\mu q_R + \bar{q}_L \gamma^\mu q_L \stackrel{(7.41)}{=} \bar{q} \gamma^\mu q, \\ A^\mu &= \bar{q}_R \gamma^\mu q_R - \bar{q}_L \gamma^\mu q_L = \bar{q} \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) \gamma^\mu q_R - \bar{q} \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5) \gamma^\mu q_L \\ &= \bar{q} \gamma^\mu \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5) q_R}_{\frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5) q} - \bar{q} \gamma^\mu \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) q_L}_{\frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) q} = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q. \end{aligned}$$

Bzgl. Parität transformieren die so genannten Vektorströme und Axialvektor- bzw. Pseudovektorströme wie

$$P : V_a^\mu(t, \vec{x}) \mapsto V_{a\mu}(t, -\vec{x}), \quad (7.48)$$

$$P : A_a^\mu(t, \vec{x}) \mapsto -A_{a\mu}(t, -\vec{x}), \quad (7.49)$$

denn

$$q(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} \gamma_0 q(t, -\vec{x}), \quad \gamma_0 \gamma^\mu \gamma_0 = \gamma_\mu, \quad \gamma_0 \gamma^\mu \gamma_5 \gamma_0 = -\gamma_\mu \gamma_5.$$

Aus Gl. (7.45) erhält man einen erhaltenen Singulettvektorstrom

$$V^\mu = \bar{q} \gamma^\mu q, \quad \partial_\mu V^\mu = 0. \quad (7.50)$$

Dieser resultiert aus einer Transformation aller links- und rechtshändigen Quarkfelder mit derselben Phase. Der Singulettaxialvektorstrom

$$A^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q, \quad (7.51)$$

resultiert aus einer Transformation aller linkshändigen Quarkfelder mit einer Phase und aller rechtshändigen Felder mit der entgegengesetzten Phase. Aufgrund von Quanteneffekten besitzt der axiale Singulettstrom eine Divergenz (Anomalie):

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{3g^2}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{G}_a^{\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\rho\sigma}, \quad \epsilon_{0123} = 1, \quad (7.52)$$

wobei der Faktor 3 seinen Ursprung in der Anzahl der flavors hat.

### 7.3.2 Quarkmassen und explizite Brechung der chiralen Symmetrie

Wir betrachten nun den Quarkmassenterm der drei leichten Quarks

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}$$

als Störung,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= -\bar{q}\mathcal{M}q \stackrel{(7.41)}{=} -(\bar{q}_R\mathcal{M}q_L + \bar{q}_L\mathcal{M}q_R) \\ &= -\bar{q} \left[ m_s \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{m_u + m_d}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_u - m_d}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] q \\ &= -\bar{q} \left[ m_s \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8^f \right) + \frac{m_u + m_d}{2} \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8^f \right) + \frac{m_u - m_d}{2}\lambda_3^f \right] q. \end{aligned} \tag{7.53}$$

Die verschiedenen Terme wurden gemäß ihrer Stärke angeordnet. Aus  $\mathcal{L}_M$  resultiert folgende Variation  $\delta\mathcal{L}_M$  bzgl. der Transformationen aus Gl. (7.43):

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_M &= -i \left[ \bar{q}_R \left( \sum_{a=1}^8 \Theta_a^R \frac{\lambda_a^f}{2} + \Theta^R \right) \mathcal{M}q_L - \bar{q}_R\mathcal{M} \left( \sum_{a=1}^8 \Theta_a^L \frac{\lambda_a^f}{2} + \Theta^L \right) q_L \right. \\ &\quad \left. + \bar{q}_L \left( \sum_{a=1}^8 \Theta_a^L \frac{\lambda_a^f}{2} + \Theta^L \right) \mathcal{M}q_R - \bar{q}_L\mathcal{M} \left( \sum_{a=1}^8 \Theta_a^R \frac{\lambda_a^f}{2} + \Theta^R \right) q_R \right] \\ &= -i \left[ \sum_{a=1}^8 \Theta_a^R \left( \bar{q}_R \frac{\lambda_a^f}{2} \mathcal{M}q_L - \bar{q}_L\mathcal{M} \frac{\lambda_a^f}{2} q_R \right) + \Theta^R (\bar{q}_R\mathcal{M}q_L - \bar{q}_L\mathcal{M}q_R) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{a=1}^8 \Theta_a^L \left( \bar{q}_L \frac{\lambda_a^f}{2} \mathcal{M}q_R - \bar{q}_R\mathcal{M} \frac{\lambda_a^f}{2} q_L \right) + \Theta^L (\bar{q}_L\mathcal{M}q_R - \bar{q}_R\mathcal{M}q_L) \right]. \end{aligned} \tag{7.54}$$

Damit erhalten wir für die Divergenzen der Ströme

$$\begin{aligned} \partial_\mu L_a^\mu &= \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\Theta_a^L} = -i \left( \bar{q}_L \frac{\lambda_a^f}{2} \mathcal{M}q_R - \bar{q}_R\mathcal{M} \frac{\lambda_a^f}{2} q_L \right), \\ \partial_\mu R_a^\mu &= \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\Theta_a^R} = -i \left( \bar{q}_R \frac{\lambda_a^f}{2} \mathcal{M}q_L - \bar{q}_L\mathcal{M} \frac{\lambda_a^f}{2} q_R \right), \\ \partial_\mu L^\mu &= \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\Theta^L} = -i (\bar{q}_L\mathcal{M}q_R - \bar{q}_R\mathcal{M}q_L), \\ \partial_\mu R^\mu &= \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\Theta^R} = -i (\bar{q}_R\mathcal{M}q_L - \bar{q}_L\mathcal{M}q_R), \end{aligned} \tag{7.55}$$

wobei in den beiden letzten Gleichungen die Anomalie noch nicht berücksichtigt ist. Umgeschrieben auf die Vektor- und Axialvektorströme lauten die Divergenzen

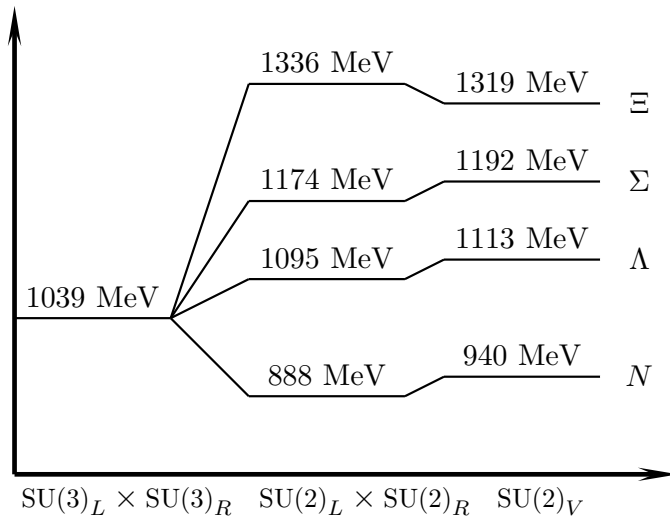
$$\begin{aligned}
\partial_\mu V_a^\mu &= -i\bar{q}_R[\frac{\lambda_a^f}{2}, \mathcal{M}]q_L - i\bar{q}_L[\frac{\lambda_a^f}{2}, \mathcal{M}]q_R \stackrel{(7.41)}{=} i\bar{q}[\mathcal{M}, \frac{\lambda_a^f}{2}]q, \\
\partial_\mu A_a^\mu &= -i\left(\bar{q}_R\frac{\lambda_a^f}{2}\mathcal{M}q_L - \bar{q}_L\mathcal{M}\frac{\lambda_a^f}{2}q_R\right) + i\left(\bar{q}_L\frac{\lambda_a^f}{2}\mathcal{M}q_R - \bar{q}_R\mathcal{M}\frac{\lambda_a^f}{2}q_L\right) \\
&= i\left(\bar{q}_L\left\{\frac{\lambda_a^f}{2}, \mathcal{M}\right\}q_R - \bar{q}_R\left\{\frac{\lambda_a^f}{2}, \mathcal{M}\right\}q_L\right) \\
&= i\left(\bar{q}\left\{\frac{\lambda_a^f}{2}, \mathcal{M}\right\}\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)q - \bar{q}\left\{\frac{\lambda_a^f}{2}, \mathcal{M}\right\}\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)q\right) \\
&= i\bar{q}\left\{\frac{\lambda_a^f}{2}, \mathcal{M}\right\}\gamma_5q, \\
\partial_\mu V^\mu &= 0, \\
\partial_\mu A^\mu &= 2i\bar{q}\mathcal{M}\gamma_5q + \frac{3g^2}{32\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{G}_a^{\mu\nu}\mathcal{G}_a^{\rho\sigma}, \quad \epsilon_{0123} = 1. \tag{7.56}
\end{aligned}$$

wobei wir jetzt die Anomalie berücksichtigt haben.

Anmerkungen:

- Der vektorielle Singulettstrom  $V^\mu$  ist immer erhalten. ( $V^\mu/3$ : Baryonenstrom).
- Der axiale Singulettstrom  $A^\mu$  besitzt eine Anomalie sowie eine explizite Divergenz in Anwesenheit von Quarkmassen.
- Da die Wechselwirkung der Gluonen mit den Quarks unabhängig vom flavor ist und die Quarkmassenmatrix diagonal ist, existiert für jeden Quarkflavor eine separate  $U(1)_V$ -Symmetrie. Die erhaltenen Ströme sind  $\bar{u}\gamma^\mu u$ ,  $\bar{d}\gamma^\mu d$  und  $\bar{s}\gamma^\mu s$ .
- Für gleiche Quarkmassen,  $m_u = m_d = m_s$ , sind die acht Vektorströme  $V_a^\mu$  erhalten, da  $[\lambda_a, \mathbb{1}] = 0$ , die acht axialen Ströme  $A_a^\mu$  dagegen nicht.
- Realistischer ist die Approximation  $m_s \neq 0$ ,  $m_u = m_d = 0$ . Damit ist zwar die  $SU(3)_V$ -Symmetrie gebrochen, aber im  $u$ - $d$ -Sektor existiert immer noch eine chirale  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie.
- Schaltet man nun die  $u$ - und  $d$ -Quarkmassen mit derselben Stärke  $m_u = m_d = \hat{m}$  ein, so reduziert sich die  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie auf eine  $SU(2)_V$ -Symmetrie (Isospin).
- Mit  $m_u \neq m_d$  ist selbst die Isospin-Symmetrie gebrochen.

Beispiel: Massen des Baryonoktetts (aus B. C. Lehnhart, *Die Massen des Baryonoktetts in relativistischer chiraler Störungstheorie*, Diplomarbeit, Mainz 2003)



# Kapitel 8

## Übungsaufgaben

### Übung 1

1. (a) [1] Zeigen Sie, dass aus der Existenz des Einselements auch dessen Eindeutigkeit folgt.  
Hinweis: Es seien  $e'$  und  $e$  Einselemente. Zeigen Sie mit „geschickter“ Anwendung von (G2), dass  $e = e'$ .
- (b) [1] Zeigen Sie die Eindeutigkeit des inversen Elementes.  
Hinweis: Beweis durch Widerspruch. Annahme  $b \neq c$  mit  $ab = ba = e = ac = ca$ . Benutzen Sie (G1) - (G3). (Alternativ lässt sich die Behauptung auch analog zu (a) zeigen.)
- (c) [1] Es seien  $a^{-1}$  and  $b^{-1}$  die zu  $a$  und  $b$  inversen Elemente. Bestimmen Sie  $(ab)^{-1}$ .
2. (a) [3] Konstruieren Sie die verschiedenen Gruppentafeln für Gruppen der Ordnung 4.  
Hinweise: In jeder Zeile bzw. Spalte der Gruppentafel tritt jedes Gruppenelement genau einmal auf. Zwei Gruppentafeln beschreiben dieselbe Gruppe, d.h. drücken dieselbe Gruppenstruktur aus, wenn sie durch Umordnen der Zeilen und Spalten und Umbenennung der Elemente in Übereinstimmung gebracht werden können.
- (b) [1] Begründen Sie nun, warum Gruppen der Ordnung 4 abelsch sind.
3. [3] Vervollständigen Sie die Gruppentafel für  $D_3 = \langle c, b \rangle$  mit den definierenden Relationen  $c^3 = b^2 = (bc)^2 = e$ :

$e$	$c$	$c^2$	$b$	$bc$	$bc^2$
$c$					
$c^2$					
$b$					
$bc$					
$bc^2$					



Hinweis: Benutzen Sie die definierenden Relationen in der Form

$$cb = ecbe = b^2cbc^3 = b(bc)^2c^2 = bec^2 = bc^2 \quad \text{usw.}$$

4. [1] Welche verschiedene nichttriviale Untergruppen besitzt  $D_3$ ?
5. [2] Schreiben Sie die Permutationen

$$\left( \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 3 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 8 & 9 & 6 & 2 & 7 \end{array} \right)$$

in Zykelnotation. Handelt es sich dabei um gerade oder ungerade Permutationen?

6. [4] Zeigen Sie, dass die Gruppe  $D_3$  aus Aufgabe 3. isomorph zur Permutationsgruppe  $S_3$  ist.

Hinweis: Bezeichnen Sie die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks gegen den Uhrzeigersinn mit  $(A, B, C)$ , wobei Ecke  $A$  ursprünglich in Position 1, Ecke  $B$  in Position 2 und Ecke  $C$  in Position 3 sei. Unter der Wirkung von  $c$  wandert Ecke  $A$  auf Position 2,  $B$  auf Position 3 und  $C$  auf Position 1. Ordnen Sie entsprechend  $c$  die Permutation  $P_5 = (123)$  zu:  $f(c) = P_5$ . Betrachten Sie die Wirkung der übrigen 5 Rotationen aus  $D_3$  auf das Dreieck und identifizieren Sie für diese  $f(g)$ . Zeigen Sie nun, dass die Struktur erhalten bleibt, indem Sie die definierenden Relationen für  $D_3$  überprüfen:  $(f(c))^3 = (f(b))^2 = (f(bc))^2 = P_1$ .

7. [3] Es sei  $SL(2, \mathbb{C})$  die Menge aller  $(2, 2)$ -Matrizen mit Werten in  $\mathbb{C}$  und Determinante 1:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1.$$

Überprüfen Sie, dass  $SL(2, \mathbb{C})$  mit der Verknüpfung Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

Hinweis: Es gilt der Determinanten-Multiplikationssatz

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

8. [3] Zeigen Sie, dass die Menge der Matrizen

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

mit  $\omega^3 = 1$  und  $\omega \neq 1$  mit der Verknüpfung Matrizenmultiplikation eine Realisierung der Gruppe  $D_3$  aus Aufgabe 3. bildet. Stellen Sie einen Isomorphismus zwischen den Gruppenelementen aus 3. und den obigen Matrizen her.

9. [2] Sei  $g \in G$ . Die kleinste natürliche Zahl  $n$  mit  $g^n = e$  heißt Ordnung des Elements  $g$ . Welche Ordnung besitzen die beiden Permutationen aus Aufgabe 5.?

## Übung 2

1. [2] Gegeben seien die Permutationen  $P_i \in S_3$  aus Beispiel 1.2.11 der Vorlesung:

$$P_1 = (), \quad P_2 = (12), \quad P_3 = (13), \quad P_4 = (23), \quad P_5 = (123), \quad P_6 = (132).$$

Überprüfen Sie exemplarisch das Assoziativgesetz:

$$(P_2P_4)P_6 = P_2(P_4P_6), \quad (P_3P_5)P_4 = P_3(P_5P_4).$$

2. (a) [4] Zeigen Sie, dass die Menge

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Untergruppe der homogenen Lorentz-Transformationen bildet.

- (b) [1] Zu welcher endlichen Gruppe der Ordnung 4 aus Übung 1, Aufgabe 2. ist  $\{E, P, T, PT\}$  isomorph (Gruppentafel)?
3. [6] Gegeben sei eine Lorentz-Transformation  $\Lambda \in L_+^\uparrow$  mit der Eigenschaft  $\Lambda t = t$ , wobei

$$t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass es sich dabei um eine eigentliche Drehung handelt.

Hinweis: Schreiben Sie

$$\Lambda = \left( \begin{array}{c|ccc} \Lambda_{00} & \Lambda_{01} & \Lambda_{02} & \Lambda_{03} \\ \hline \Lambda_{10} & & & \\ \Lambda_{20} & & D_{3 \times 3} & \\ \Lambda_{30} & & & \end{array} \right)$$

und benutzen Sie  $\Lambda t = t$ . Sie erhalten damit Bedingungen für  $\Lambda_{00}$  und  $\Lambda_{i0}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Benutzen Sie nun die neue Form für  $\Lambda$  und machen Sie Gebrauch von Gl. (1.1) aus der Vorlesung,  $G = \Lambda^T G \Lambda$ . Sie erhalten Bedingungen für  $\Lambda_{0j}$ ,  $j = 1, 2, 3$  und  $D_{3 \times 3}$ . Benutzen Sie schließlich  $\det(\Lambda) = 1$ .

4. Gegeben seien zwei eigentliche, orthochrone Lorentz-Transformationen  $\Lambda_1$  und  $\Lambda_2 \in L_+^\uparrow$ . Zeigen Sie für  $\Lambda_3 = \Lambda_2 \Lambda_1$

- (a) [1]  $\Lambda_3^T G \Lambda_3 = G$ ,  
 (b) [1]  $\det(\Lambda_3) = +1$ .

5. [5] Welche der folgenden Gruppen sind isomorph zueinander? Geben Sie den Isomorphismus an, sofern er existiert. Beachten Sie, dass für Gruppen der Ordnung 4 nur zwei verschiedene Strukturen existieren (siehe Übung 1, Aufgabe 2.).

- (1) Die Menge der komplexen Zahlen  $\{1, i, -1, -i\}$  mit Multiplikation als Verknüpfung.  
 (2) Die Menge der natürlichen Zahlen  $\{2, 4, 6, 8\}$  mit Multiplikation modulo 10 als Verknüpfung.

Hinweis: Zwei ganze Zahlen  $a$  und  $b$  heißen kongruent modulo  $m$  (wobei  $m$  eine positive ganze Zahl ist), wenn  $m$  die Differenz  $(a - b)$  teilt. Man schreibt dann  $a \equiv b \pmod{m}$ .

Beispiel:  $2 \cdot 6 = 12 \equiv 2 \pmod{10}$ .

- (3) Die Untergruppe  $\{(), (12), (34), (12)(34)\}$  von Permutationen aus  $S_4$ . Hierbei steht  $()$  für die Identitätspermutation.  
 (4) Die Untergruppe  $\{(), (1234), (1432), (13)(24)\}$  aus  $S_4$ .  
 (5) Die Menge der vier Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit Matrizenmultiplikation als Verknüpfung.

6. Überprüfen Sie, dass die Menge der Matrizen

$$L(\beta) = (1 - \beta^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

für  $-1 < \beta < 1$  mit der Verknüpfung Matrizenmultiplikation eine abelsche Gruppe bildet.

(a) Verifizieren Sie zunächst die Abgeschlossenheit. Sei

$$L(\beta_3) = L(\beta_2)L(\beta_1).$$

[2] Wie lautet  $\beta_3$  als Funktion von  $\beta_1$  und  $\beta_2$ ?

[6] Begründen Sie nun mit einer geeigneten Anwendung der Ordnungsaxiome, dass  $-1 < \beta_3 < 1$  (dies ist etwas aufwändiger).

(b) [2] Überprüfen Sie die Gruppenaxiome und die Kommutativität.

### Übung 3

1. Gegeben sei die Gruppe  $G = \text{SU}(2)$ . Welche der folgenden Abbildungen  $A$  stellen Operationen von  $G$  auf  $M$  dar?

(a) [1]

$$M := \left\{ m = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mid z_i \in \mathbb{C} \right\}, \quad A_i(g, m) = g_{ij}z_j \quad \text{oder kurz} \quad A(g, m) = gm.$$

(b) [1]

$$M := \left\{ m = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}, \quad A_i(g, m) = g_{ij}x_j \quad \text{oder kurz} \quad A(g, m) = gm.$$

(c) [1]

$$M := \{ m \in \text{SU}(2) \}, \quad A_{ij}(g, m) = g_{ik}m_{kj} \quad \text{oder kurz} \quad A(g, m) = gm.$$

(d) [1]

$$M := \{ m \in \text{SU}(2) \}, \quad A_{ij}(g, m) = g_{ik}m_{kl}g_{lj}^* \quad \text{oder kurz} \quad A(g, m) = gmg^\dagger.$$

(e) [1]

$$M := \{ m \in \text{SU}(2) \}, \quad A_{ij}(g, m) = g_{ik}m_{kl}g_{lj} \quad \text{oder kurz} \quad A(g, m) = gmg.$$

(f) [1]

$$M := \{ m \mid m \text{ hermitesche } (2,2)\text{-Matrix} \}, \\ A_{ij}(g, m) = g_{ik}m_{kl}g_{lj}^* \quad \text{oder kurz} \quad A(g, m) = gmg^\dagger.$$

2. Das Zentrum  $Z$  einer Gruppe  $G$  besteht aus allen Elementen  $z$ , die mit allen Elementen der Gruppe kommutieren:

$$Z := \{z \in G \mid zg = gz \ \forall g \in G\}.$$

- (a) [2] Zeigen Sie, dass  $Z$  eine abelsche Untergruppe von  $G$  ist.  
 (b) [1] Zeigen Sie, dass  $Z$  ein Normalteiler von  $G$  ist.
3. [5] Wie lautet das Zentrum von  $SU(2)$ ?

Hinweis: Jede  $SU(2)$ -Matrix  $A$  kann in der Form

$$A = a_0 1_{2 \times 2} + i \sum_{i=1}^3 \sigma_i a_i, \quad a_0, a_i \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j=0}^3 a_j^2 = 1,$$

geschrieben werden, wobei  $\sigma_i$  die Pauli-Matrizen sind. Benutzen Sie die Vertauschungsrelationen der Pauli-Matrizen,

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k.$$

Tipp: Wenn  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$  für beliebiges  $\vec{b}$ , dann folgt  $\vec{a} = \vec{0}$ .

4. [3] Sei  $H$  eine Untergruppe der endlichen Gruppe  $G$ . Zeigen Sie, dass die Ordnung von  $H$  ein Teiler der Ordnung von  $G$  sein muss (Satz von Lagrange).

Hinweis: Benutzen Sie, dass jede Links- oder Rechtsnebenklasse von  $H$  in  $G$  dieselbe Anzahl an Elementen hat wie  $H$  (wieso?).

5. [3] Sei  $G = \{C = (A, B) \mid A \in SU(n), B \in SU(n)\}$  mit  $C_1 C_2 = (A_1 A_2, B_1 B_2)$ . Welche der Mengen bilden eine Untergruppe mit der Verknüpfung von  $G$ ? Ist eine der Untergruppen ein Normalteiler?

- (a)  $\{X = (A, A) \mid A \in SU(n)\}$ ,  
 (b)  $\{X = (A, 1_{n \times n}) \mid A \in SU(n)\}$ ,  
 (c)  $\{X = (A, A^\dagger) \mid A \in SU(n)\}$ .

6. Gegeben sei die Gruppe  $G = SU(2) \times SU(2)$ . Sie besteht aus der Menge  $\{g = (L, R) \mid L \in SU(2), R \in SU(2)\}$  mit der Verknüpfung  $g_1 g_2 = (L_1, R_1)(L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_1 R_2)$ . Welche der folgenden Abbildungen stellen Operationen von  $G$  auf  $M$  dar?

- (a) [1]  $M = SU(2)$ ,  $A(g, U) := RUL^\dagger$  für  $U \in M$  und  $g \in G$ .  
 (b) [1]  $M = SU(2)$ ,  $A(g, U) := RU$  für  $U \in M$  und  $g \in G$ .  
 (c) [1]  $M = SU(2)$ ,  $A(g, U) := RUL$  für  $U \in M$  und  $g \in G$ .

7. [2] Betrachte  $G = \text{SO}(3)$ .  $H = \{\text{Drehungen bzgl. } z\text{-Achse}\}$ . Zeigen Sie, dass  $H$  kein Normalteiler ist.

Hinweis: Betrachten Sie ein beliebiges  $h \in H$  und bestimmen Sie  $ghg^{-1}$ , wobei  $g$  eine Drehung bzgl. der  $x$ -Achse mit Drehwinkel  $\pi/2$  sei.

## Übung 4

1. (a) [3] Überprüfen Sie die Gruppenaxiome (G1) – (G3) für die Faktorgruppe  $G/H$  (siehe Satz 1.3.22).
  - (b) [3] Wir betrachten die Gruppe  $D_3 = \langle c, b \rangle$  mit  $c^3 = b^2 = (bc)^2 = e$  und deren Normalteiler  $C_3 = \langle c \rangle$  mit  $c^3 = e$ . Wie lauten die Elemente der Faktorgruppe  $D_3/C_3$ ? Berechnen Sie explizit die Produkte der Gruppenelemente der Faktorgruppe.
  - (c) [2] Betrachten Sie nun die Untergruppe  $C_2 = \langle b \rangle$  mit  $b^2 = e$ , die kein Normalteiler ist. Bestimmen Sie die Menge aller Linksnebenklassen  $gC_2$  und die Menge aller Rechtsnebenklassen  $C_2g$ . Fällt Ihnen ein Unterschied zur Eigenschaft eines Normalteilers auf?
2. [2] Zeigen Sie, dass die Gruppe  $\text{O}(3)$  das interne direkte Produkt von  $\text{SO}(3)$  und  $\{e, p\} = \{1_{3 \times 3}, -1_{3 \times 3}\}$  ist.
  3. Gegeben sei die Gruppe  $\text{U}(2)$  der unitären  $(2,2)$ -Matrizen.
    - (a) [2] Zeigen Sie, dass die Gruppe  $\text{SU}(2)$  und die zu  $\text{U}(1)$  isomorphe Gruppe  $\{e^{i\varphi} 1_{2 \times 2} \mid 0 \leq \varphi < 2\pi\}$  Normalteiler von  $\text{U}(2)$  sind.
    - (b) [1] Ist  $\text{U}(2)$  das interne direkte Produkt der beiden Normalteiler aus (a)?
  4. Gegeben seien die  $(2,2)$ -Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} a_0 + ib_3 & ib_1 + b_2 \\ ib_1 - b_2 & a_0 - ib_3 \end{pmatrix}$$

mit  $a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $b_i \in \mathbb{R}$  und  $a_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$ .

- (a) [1] Zeigen Sie

$$M^\dagger M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

- (b) [1]

$$\det(M) = 1.$$

5. Sei  $G$  die Menge *aller* Polynome mit der Verknüpfung Addition.

- (a) [2] Handelt es sich dabei um eine Gruppe?
- (b) [1] Zeigen Sie, dass die Abbildung  $\varphi : G \rightarrow G$  mit  $p(x) \mapsto \frac{d}{dx}p(x)$  ein Homomorphismus ist.
- (c) [1] Ist die Abbildung surjektiv (injektiv)?
- (d) [1] Was ist der Kern der Abbildung?

6. [3] Zeigen Sie, dass die Menge aller reellen Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

eine Gruppe bzgl. Matrizenmultiplikation bildet, wenn  $a$  und  $b$  eine bestimmte Bedingung erfüllen. Wie lautet diese Bedingung? Ist die Gruppe abelsch?

7. [3] Gegeben sei die Menge der Funktionen

$$G = \left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{1}{1-x}, f_3(x) = \frac{x-1}{x}, \\ f_4(x) = \frac{1}{x}, f_5(x) = 1-x, f_6(x) = \frac{x}{x-1} \end{array} \right\}$$

mit folgender Regel als Komposition

$$(f_i f_j)(x) = f_i(f_j(x)).$$

Zeigen Sie, dass  $G$  eine Realisierung von  $D_3$  ist.

8. [2] Seien  $H$  und  $K$  Untergruppen von  $G$ . Zeigen Sie, dass auch  $H \cap K$  eine Untergruppe von  $G$  ist.

Bemerkung:  $H \cup K$  ist nicht notwendigerweise eine Gruppe. Zum Beispiel enthält die abstrakte Gruppe  $D_3$  als Untergruppen  $H = \{e, c, c^2\}$  und  $K = \{e, b\}$ . Die Vereinigung  $H \cup K = \{e, c, c^2, b\}$  ist nicht abgeschlossen.

## Übung 5

1. [3] Es sei  $R_{n_1}(\phi)$  eine Drehung um eine durch den Einheitsvektor  $n_1$  gekennzeichnete Achse mit Drehwinkel  $\phi$ , d. h.

$$R_{n_1}(\phi)n_1 = n_1 \quad \text{und} \quad \text{Tr}(R_{n_1}(\phi)) = 1 + 2 \cos(\phi).$$

Es sei weiterhin  $T$  diejenige Drehung, die  $n_1$  in eine neue Drehachse  $n_2$  überführt, d. h.

$$n_2 = Tn_1 \quad \text{mit} \quad \det(T) = 1.$$

Zeigen Sie, dass  $R_{n_2}(\phi) := TR_{n_1}(\phi)T^{-1}$  eine Drehung um  $n_2$  mit Drehwinkel  $\phi$  ist.

( $R_{n_2}(\phi)$  ist zu  $R_{n_1}(\phi)$  konjugiert mit  $T$  als konjugierendem Element.)

2. [7] Es sei  $R \in \text{SO}(3)$  mit der folgenden Parametrisierung durch Euler-Winkel:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_{v_3}(\gamma)R_{u_2}(\beta)R_{e_3}(\alpha), \quad 0 \leq \alpha, \gamma < 2\pi, 0 \leq \beta \leq \pi. \quad (1)$$

Die einzelnen Drehungen lassen sich jeweils als Abbildungen einer Orthogonalbasis (ONB) auf eine gleichorientierte neue ONB interpretieren.

- $R_{e_3}(\alpha)$  beschreibt Drehung um  $e_3$  mit Drehwinkel  $\alpha$ :  $u_j = R_{e_3}(\alpha)e_j$ .
- $R_{u_2}(\beta)$  beschreibt Drehung um  $u_2$  (neue 2-Achse) mit Drehwinkel  $\beta$ :  $v_j = R_{u_2}(\beta)u_j$ .
- $R_{v_3}(\gamma)$  beschreibt Drehung um  $v_3$  (neue 3-Achse nach zwei Drehungen) mit Drehwinkel  $\gamma$ :  $w_j = R_{v_3}(\gamma)v_j$ .
- Kombiniert:

$$w_j = R_{v_3}(\gamma)v_j = R_{v_3}(\gamma)R_{u_2}(\beta)u_j = R_{v_3}(\gamma)R_{u_2}(\beta)R_{e_3}(\alpha)e_j = R(\alpha, \beta, \gamma)e_j.$$

Zeigen Sie, dass die kombinierte Drehung sich auch als 3 aufeinanderfolgende Drehungen ausschließlich um die Achsen  $e_2$  und  $e_3$  ausdrücken lässt:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_{e_3}(\alpha)R_{e_2}(\beta)R_{e_3}(\gamma), \quad 0 \leq \alpha, \gamma < 2\pi, 0 \leq \beta \leq \pi.$$

Hinweis: Wenden Sie das Resultat aus Aufgabe 1. an und zeigen Sie

$$R_{v_3}(\gamma) = R_{u_2}(\beta)R_{u_3}(\gamma)R_{u_2}^{-1}(\beta), \quad (2)$$

$$R_{u_2}(\beta) = R_{e_3}(\alpha)R_{e_2}(\beta)R_{e_3}^{-1}(\alpha). \quad (3)$$

Geben Sie in beiden Fällen explizit die Analoga zu  $T$ ,  $n_1$  und  $n_2$  an.

Setzen Sie nun zunächst (2) in (1) ein und beachten Sie, dass  $u_3 = e_3$ . Außerdem vertauschen Drehungen um dieselbe Achse. Wenden Sie anschließend (3) an.

3. Gegeben sei

$$U_k(\phi) = \exp\left(-i\frac{\sigma_k}{2}\phi\right), \quad k = 1, 2, 3.$$

Eigenschaften der Pauli-Matrizen:

$$\sigma_i = \sigma_i^\dagger, \quad \text{Tr}(\sigma_i) = 0, \quad \sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}1_{2 \times 2} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k.$$

- (a) [2] Verifizieren Sie mit Hilfe der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion und der Eigenschaften der Pauli-Matrizen

$$U_k(\phi) = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)1_{2 \times 2} - i\sigma_k \sin\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Hinweis:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$



(b) [2] Verifizieren Sie

$$U_3(\gamma) = \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{\gamma}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\gamma}{2}\right) \end{pmatrix},$$
$$U_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Anmerkung: Die Einträge der Matrix  $U_2(\beta)$  sind die so genannten reduzierten Kreiselfunktionen  $d_{mm'}^{(\frac{1}{2})}(\beta)$ .

(c) [1] Was ist  $U_3(2\pi)$  und  $U_3(2\pi + \theta)$ ? Wann wird das Einselement wieder erreicht?

(d) [5] Verifizieren Sie für festes  $k$

$$U_k(\phi)\sigma_j U_k^\dagger(\phi) = \cos(\phi)\sigma_j + [1 - \cos(\phi)]\delta_{kj}\sigma_k - \sin(\phi)\epsilon_{jkl}\sigma_l.$$

Summation hier nur über  $l$ ;  $k$  ist fest!

Hinweis: Sie benötigen Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen.

---

(e) [2] Bestimmen Sie

$$\varphi_{ij}[U_k(\phi)] = \frac{1}{2}\text{Tr}[\sigma_i U_k(\phi)\sigma_j U_k^\dagger(\phi)].$$

4. [3] Sei  $\varphi$  ein Homomorphismus von  $G$  in  $G'$ . Zeigen Sie, dass  $\text{Kern}(\varphi)$  ein Normalteiler von  $G$  ist.

Bemerkung: In der Vorlesung wurde bereits die Abgeschlossenheit gezeigt.

## Übung 6

1. [2] Es sei  $G$  eine Gruppe. Gegeben sei die Abbildung  $\varphi : G \rightarrow G$  mit  $\varphi(g) = g^{-1}$ . Unter welcher Bedingung handelt es sich dabei um einen Automorphismus?

2. [7] Es seien  $L(\beta_x \hat{e}_x)$  und  $L(\beta_z \hat{e}_z)$  spezielle Lorentz-Transformationen entlang der  $x$ - und  $z$ -Achse und  $\mathcal{R}_3(\varphi)$  eine Drehung um die  $z$ -Achse

mit Drehwinkel  $0 \leq \varphi < 2\pi$ :

$$L(\beta_x \hat{e}_x) = \begin{pmatrix} \gamma_x & \beta_x \gamma_x & 0 & 0 \\ \beta_x \gamma_x & \gamma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_x = \tanh(\lambda_x), \gamma_x = \cosh(\lambda_x), -\infty < \lambda_x < \infty,$$

$$L(\beta_z \hat{e}_z) = \begin{pmatrix} \gamma_z & 0 & 0 & \beta_z \gamma_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta_z \gamma_z & 0 & 0 & \gamma_z \end{pmatrix}, \quad \beta_z = \tanh(\lambda_z), \gamma_z = \cosh(\lambda_z), -\infty < \lambda_z < \infty,$$

$$\mathcal{R}_3(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Bestimmen Sie  $L(\beta_z \hat{e}_z)L(\beta_x \hat{e}_x)$ ,  $L(\beta_x \hat{e}_x)L(\beta_z \hat{e}_z)$ ,  $L(\beta_x \hat{e}_x)\mathcal{R}_3(\varphi)$ ,  $\mathcal{R}_3(\varphi)L(\beta_x \hat{e}_x)$ ,  $L(\beta_z \hat{e}_z)\mathcal{R}_3(\varphi)$  und  $\mathcal{R}_3(\varphi)L(\beta_z \hat{e}_z)$ . Welche Schlüsse ziehen Sie bzgl. der Vertauschbarkeit von Lorentz-Transformationen?

3. Wir betrachten die komplexwertigen (2,2)-Matrizen

$$A(\vec{\xi}) := \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sigma_i \xi_i\right) = \exp\left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\xi}}{2}\right), \quad \xi_i \in \mathbb{R}.$$

(a) [2] Zeigen Sie mit Hilfe der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion, dass

$$\exp\left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\xi}}{2}\right) = \cosh\left(\frac{\xi}{2}\right) 1_{2 \times 2} + \vec{\sigma} \cdot \hat{\xi} \sinh\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad \xi = \sqrt{\vec{\xi}^2}, \quad \hat{\xi} = \frac{\vec{\xi}}{\xi}.$$

Hinweis:  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})^2 = \vec{a}^2 1_{2 \times 2}$ .

(b) [3] Zeigen Sie, dass

$$\det(A(\vec{\xi})) = 1.$$

Wie lauten  $A^{-1}$  und  $A^\dagger$ ?

(c) [6] Wir parametrisieren nun einen Punkt  $x$  des Minkowski-Raums durch die hermitesche (2,2)-Matrix

$$X = x_0 1_{2 \times 2} + \vec{\sigma} \cdot \vec{x}.$$

Betrachten Sie nun die Abbildung

$$X \mapsto Y = y_0 1_{2 \times 2} + \vec{\sigma} \cdot \vec{y} := A(\vec{\xi}) X A^\dagger(\vec{\xi})$$

und geben Sie die Wirkung für die Komponenten an:

$$\begin{aligned} x_0 &\mapsto y_0 = ?, \\ x_i &\mapsto y_i = ?. \end{aligned}$$

Um welche Transformationen handelt es sich?

Hinweise:

$$\begin{aligned}\sigma_i \sigma_j &= \delta_{ij} 1_{2 \times 2} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k, \\ \cosh^2\left(\frac{\xi}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{\xi}{2}\right) &= \cosh(\xi) =: \gamma, \\ \cosh^2\left(\frac{\xi}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{\xi}{2}\right) &= 1, \\ 2 \cosh\left(\frac{\xi}{2}\right) \sinh\left(\frac{\xi}{2}\right) &= \sinh(\xi) =: \beta\gamma, \\ \sinh^2\left(\frac{\xi}{2}\right) &= \frac{1}{2}(\cosh(\xi) - 1).\end{aligned}$$

4. [2] Gegeben sei die Drehmatrix

$$D_{mm'}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle l, m | \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) | l, m' \rangle^*$$

mit

$$\mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) = \exp(-i\alpha l_z) \exp(-i\beta l_y) \exp(-i\gamma l_z).$$

Zeigen Sie, dass

$$D_{mm'}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) = \exp(im\alpha) d_{mm'}^{(l)}(\beta) \exp(im'\gamma).$$

Wie lautet die Definition für  $d_{mm'}^{(l)}(\beta)$ ?

5. [5] Gegeben sei die Diedergruppe  $D_4 = \langle c, b \rangle$  mit den erzeugenden Relationen  $c^4 = b^2 = (bc)^2 = e$ . Bestimmen Sie die Konjugationsklassen von  $D_4$ .

Hinweise: Sie müssen von den erzeugenden Relationen Gebrauch machen. Benutzen Sie außerdem die Folgerungen 1.3.12 der Vorlesung.

## Übung 7

- [3] Sei  $M := \{D | D \text{ Darstellung von } G\}$ . Überprüfen Sie, dass folgende Relation eine Äquivalenzrelation darstellt:  $D_1 : V_1 \rightarrow V_1 \sim D_2 : V_2 \rightarrow V_2$ , wenn ein bijektives  $S : V_1 \rightarrow V_2$  existiert mit  $SD_1(g)S^{-1} = D_2(g) \forall g \in G$ .
- Es sei  $G = \{T_2(a_1, a_2)\}$  die Gruppe der zweidimensionalen Translationen:

$$T_2(a_1, a_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T_2(a_1, a_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + a_1 \\ x_2 + a_2 \end{pmatrix}, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

- (a) [2] Zeigen Sie, dass  $D_1 : G \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C}), T(a_1, a_2) \mapsto D_1(a_1, a_2) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  mit

$$D_1(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + ia_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Darstellung von  $G$  ist. Ist  $D_1$  eine treue Darstellung?

- (b) [2] Zeigen Sie, dass  $D_2 : G \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R}), T(a_1, a_2) \mapsto D_2(a_1, a_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$D_2(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Darstellung von  $G$  ist. Wie lautet  $\text{Kern}(D_2)$ ? Ist  $D_2$  eine treue Darstellung?

3. [4] Gegeben seien die Energieeigenwerte eines Elektrons im Coulomb-Potential und in einem harmonischen Oszillatorpotential:

$$E_n = -\frac{\alpha^2 m}{2n^2} \approx -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}, \quad n = n' + l + 1, \quad n', l \geq 0,$$

$$E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) \omega, \quad n = 2n' + l, \quad n', l \geq 0.$$

Bestimmen Sie den Entartungsgrad der Eigenwerte für vorgegebenes  $n$ . Beachten Sie, dass für festes  $l$  die Eigenwerte zu  $l_z$  die Werte  $-l, -l + 1, \dots, l$  annehmen können. Skizzieren Sie die Energieeigenwerte  $E_n$  in Abhängigkeit von  $l$  für  $n = 1, \dots, 4$  (Wasserstoff) und  $n = 0, \dots, 3$  (harmonischer Oszillator).

4. Betrachten Sie den Zustand  $|2, 1, 1\rangle$  des Wasserstoffatoms mit der Wellenfunktion

$$\Psi_{211}(\vec{x}) = R_{21}(r)Y_{11}(\Theta, \Phi).$$

- (a) [2] Bestimmen Sie den Erwartungswert  $\langle 2, 1, 1 | l_x | 2, 1, 1 \rangle$ .  
 (b) [1] Bestimmen Sie  $l_z | 2, 1, 1 \rangle$ .

Hinweise: Die Radialwellenfunktion ist normiert:

$$\int_0^\infty dr r^2 R_{21}^2(r) = 1.$$

Die Kugelfunktion  $Y_{11}$  lautet

$$Y_{11}(\Theta, \Phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\Theta) e^{i\Phi}.$$

Für die Drehimpulsoperatoren in Kugelkoordinaten gilt

$$l_x = i \left[ \sin(\Phi) \frac{\partial}{\partial \Theta} + \cot(\Theta) \cos(\Phi) \frac{\partial}{\partial \Phi} \right], \quad l_z = -i \frac{\partial}{\partial \Phi}.$$

- (c) [2] Wir betrachten eine Drehung um die  $y$ -Achse mit Drehwinkel  $\beta$  mit der induzierten Transformation

$$\mathcal{R}(0, \beta, 0) = \exp(-i\beta l_y).$$

Benutzen Sie die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \dots$$

für  $A = i\beta l_y$  und  $B = l_x$  zusammen mit den kanonischen Vertauschungsrelationen für die Drehimpulsoperatoren und leiten Sie folgende Formel her:

$$\exp(i\beta l_y) l_x \exp(-i\beta l_y) = \cos(\beta) l_x + \sin(\beta) l_z.$$

- (d) [2] Wir betrachten nun denjenigen Zustand, der durch eine Drehung um die  $y$ -Achse mit Drehwinkel  $\pi/2$  entsteht:

$$|2, 1, 1\rangle' = \exp\left(-i\frac{\pi}{2} l_y\right) |2, 1, 1\rangle.$$

Bestimmen Sie  $l_x |2, 1, 1\rangle'$ .

- (e) [2] Benutzen Sie die kanonischen Vertauschungsrelationen für die Ortsoperatoren und die Impulsoperatoren,

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [x_i, p_j] = i\delta_{ij},$$

zusammen mit der Definition für die (Bahn-) Drehimpulsoperatoren,  $l_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$ , und leiten Sie die Vertauschungsrelationen zwischen den Ortsoperatoren und den Drehimpulsoperatoren und den Impulsoperatoren und den Drehimpulsoperatoren her.

- (f) [2] Bestimmen Sie nun

$$\exp(i\beta l_y) x \exp(-i\beta l_y) \quad \text{und} \quad \exp(i\beta l_y) p_x \exp(-i\beta l_y).$$

5. Gegeben seien die Radialwellenfunktionen

$$R_{20}(r) = \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} 2 \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right),$$

$$R_{21}(r) = \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{r}{2a_0} \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)$$

des Wasserstoffatoms, wobei  $a_0 = 1/(\alpha m)$ .

- (a) [1] Wieviele radiale Knoten besitzen  $R_{20}$  und  $R_{21}$  (mögliche Nullstelle für  $r = 0$  und asymptotische Nullstelle nicht mitgezählt)?

(b) [2] Berechnen Sie das Matrixelement

$$\int_0^\infty dr r^2 R_{21}(r) R_{20}(r).$$

Tipp:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

## Übung 8

1. [4] Sei  $G$  eine endliche Gruppe der Ordnung  $|G|$  mit Darstellung  $D$  auf einem Skalarproduktraum  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ . Zeigen Sie, dass

$$\{x|y\} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle D(g)x | D(g)y \rangle$$

ein weiteres Skalarprodukt definiert. Überprüfen Sie dazu die 3 definierenden Eigenschaften eines Skalarprodukts.

2. [4] Sei  $D = \{D(g)\}$  eine Darstellung einer Gruppe  $G$  in Form von Matrizen mit  $g \mapsto D(g)$ . Zeigen Sie, dass dann

$$(1) \quad g \mapsto D^*(g), \quad (2) \quad g \mapsto D^T(g^{-1}), \quad (3) \quad g \mapsto D^\dagger(g^{-1})$$

auch Darstellungen von  $G$  definieren.

Hinweis: Begründen Sie zunächst, warum die Matrizen aus (1) - (3) invertierbar sind. Überprüfen Sie anschließend die Homomorphismeigenschaft.

3. [2] Gegeben sei eine zweidimensionale Darstellung von  $SU(2)$  auf  $\mathbb{C}^2$  mit Elementen der Form

$$U(\theta, \hat{n}) = \exp\left(-\frac{1}{2}i\theta\vec{\sigma} \cdot \hat{n}\right).$$

Zeigen Sie, dass  $\{U^*(\theta, \hat{n})\}$  eine äquivalente Darstellung bildet.

Hinweis: Bestimmen Sie  $\sigma_j^*$ . Betrachten Sie  $S = -i\sigma_2$  und überprüfen Sie damit

$$U^*(\theta, \hat{n}) = S U(\theta, \hat{n}) S^{-1}.$$

4. [3] Es seien  $D^{(1)}$  und  $D^{(2)}$  Darstellungen von  $G_1$  und  $G_2$  auf endlichdimensionalen Vektorräumen  $V_1$  und  $V_2$  und  $D$  Darstellung von  $G_1 \times G_2$  auf  $V_1 \otimes V_2$  mit  $D(g_1, g_2) = D^{(1)}(g_1) \otimes D^{(2)}(g_2)$ . Zeigen Sie:

$D$  irred. Darstellung von  $G_1 \times G_2 \Rightarrow D^{(1)}$  und  $D^{(2)}$  irred.  
Darstellungen von  $G_1$  und  $G_2$ .

Hinweis: Beweis durch Widerspruch. Nehmen Sie an, dass  $D^{(1)}$  reduzibel sei, d.h. ein nichttrivialer Unterraum  $U_1$  von  $V_1$  existiert, der für alle  $g_1 \in G_1$  invariant ist. Führen Sie dies auf einen Widerspruch zur Voraussetzung  $D$  irreduzibel.

5. Gegeben sei der Hilbert-Raum  $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$  eines Spin-1/2-Teilchens mit Basis

$$\{|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

(a) [2] Es seien  $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ , die üblichen Pauli-Matrizen und  $\sigma_{\pm} := \sigma_1 \pm i\sigma_2$ . Berechnen Sie

$$\sigma_{\pm} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\pm} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es sei  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$  und

$$|1\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle, \quad |2\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle, \quad |3\rangle = |-\rangle \otimes |+\rangle, \quad |4\rangle = |-\rangle \otimes |-\rangle.$$

Wir führen folgende neue Basis ein:

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &:= |1\rangle, \\ |1, 0\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |3\rangle), \\ |1, -1\rangle &:= |4\rangle, \\ |0, 0\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle - |3\rangle). \end{aligned}$$

Wir definieren den Operator für den Gesamtspin als  $\vec{S} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \frac{\vec{\sigma}}{2} = \frac{\vec{\sigma}(1)}{2} + \frac{\vec{\sigma}(2)}{2} = \vec{S}(1) + \vec{S}(2)$ .

(b) [1] Bestimmen Sie  $S_3$  angewandt auf  $|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle$  und  $|0, 0\rangle$ .

(c) [4] Bestimmen Sie  $\vec{S}^2$  angewandt auf  $|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle$  und  $|0, 0\rangle$ .

Hinweise:

$$\begin{aligned} \vec{S}^2 &= \left( \frac{\sigma_i}{2} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \frac{\sigma_i}{2} \right) \left( \frac{\sigma_i}{2} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \frac{\sigma_i}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (\vec{\sigma}^2 \otimes \mathbb{1} + 2\sigma_i \otimes \sigma_i + \mathbb{1} \otimes \vec{\sigma}^2). \end{aligned}$$

Physikerschreibweise:

$$\vec{S}^2 = \frac{1}{4} (\vec{\sigma}^2(1) + 2\sigma_i(1)\sigma_i(2) + \vec{\sigma}^2(2)).$$

Drücken Sie  $\sigma_i(1)\sigma_i(2)$  mit Hilfe der Operatoren  $\sigma_{\pm}$  und  $\sigma_3$  aus und verwenden Sie die Resultate aus (a).

- 
6. **Aufhebung von Entartung.** [4] Betrachten Sie folgenden Hamilton-Operator für zwei Spin-1/2-Teilchen (die direkte Produktschreibweise wie in 5. ist nun, wie in der Physik üblich, unterdrückt):

$$H = \underbrace{a(\vec{S}^2(1) + \vec{S}^2(2))}_{H_0} + \underbrace{2b\vec{S}(1) \cdot \vec{S}(2)}_{H_1} + \underbrace{c(S_3(1) + S_3(2))}_{H_2}$$

mit  $0 < c \ll b \ll a$ ,  $\vec{S}(i) = \frac{\vec{\sigma}(i)}{2}$ ,  $i = 1, 2$ .  $H_0$  ist invariant bzgl.  $SU(2) \times SU(2)$ ,  $H_1$  ist invariant bzgl.  $\{(g, g) | g \in SU(2)\} \cong SU(2)$  und  $H_2$  invariant bzgl.  $U(1)$ . Wie lauten die Eigenzustände und die Energieeigenwerte zu  $H_0$ ,  $H_0 + H_1$  und  $H_0 + H_1 + H_2$ . Skizzieren Sie das Spektrum. Benutzen Sie  $\vec{S} = \vec{S}(1) + \vec{S}(2)$  und die Resultate aus 5.

7. [2] Gegeben sei folgende dreidimensionale Darstellung  $D : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  der Permutationsgruppe  $S_3$  mit

$$\begin{aligned} D(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D(12) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D(13) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ D(23) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & D(123) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & D(321) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Darstellung reduzibel ist.

Hinweis: Finden Sie einen gemeinsamen Eigenvektor aller  $D(g)$  und damit einen nichttrivialen invarianten Unterraum.

## Übung 9

1. Gegeben sei der Hamilton-Operator des Zwei-Elektronen-Systems aus Beispiel 2.2.17 der Vorlesung:

$$H = \underbrace{\frac{\vec{p}^2(1)}{2m} + V_1(r(1))}_{H_0(1)} + \underbrace{\frac{\vec{p}^2(2)}{2m} + V_1(r(2)) + V_2(r_{12})}_{H_0(2)} =: H_0 + V_2$$

mit  $(n = 1, 2)$

$$r(n) = |\vec{r}(n)|, \quad r_{12} = |\vec{r}(1) - \vec{r}(2)|, \quad V_1(r(n)) = -\frac{Z\alpha}{r(n)}, \quad V_2(r_{12}) = \frac{\alpha}{r_{12}}$$

und den Vertauschungsrelationen  $(m, n \in \{1, 2\}; i, j \in \{1, 2, 3\})$

$$[x_i(m), x_j(n)] = 0, \quad [p_i(m), p_j(n)] = 0, \quad [x_i(m), p_j(n)] = i\delta_{ij}\delta_{mn}.$$



- (a) [4] Berechnen Sie  $[l_i(n), V_2(r_{12})]$  für  $n = 1$  und  $n = 2$ .
- (b) [1] Zeigen Sie nun  $[L_i, V_2(r_{12})] = 0$  mit  $\vec{L} = \vec{l}(1) + \vec{l}(2)$ .
2. [2] Es seien  $D^{(1)}$  und  $D^{(2)}$  zwei äquivalente, endlichdimensionale Darstellungen einer Gruppe  $G$  auf Vektorräumen  $V_1$  und  $V_2$ . Zeigen Sie für die Charaktere  $\chi^{(1)}(g) = \chi^{(2)}(g) \forall g \in G$ .
3. [2] Es sei  $G = \text{SU}(2)$ . Wir parametrisieren Elemente aus  $G$  durch einen Einheitsvektor  $\hat{n}$  und  $\theta \in [0, 2\pi]$ :

$$g(\hat{n}, \theta) = \exp\left(-i\theta \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{n}}{2}\right).$$

Wir betrachten nun die Fundamentaldarstellung **2** von  $\text{SU}(2)$ :

$$\text{SU}(2) \ni g \mapsto D(g) := g \in \mathbf{2},$$

wobei  $D(g)$  nun als linearer Operator auf  $\mathbb{C}^2$  zu verstehen ist. Analog führen wir die komplex konjugierte Darstellung **2\*** ein:

$$\text{SU}(2) \ni g \mapsto D^*(g) := g^* \in \mathbf{2}^*.$$

Wie lauten die Charaktere  $\chi(g)$  und  $\chi^*(g)$  der Fundamentaldarstellung und der dazu komplex konjugierten Darstellung als Funktionen von  $\hat{n}$  und  $\theta$ ?

4. [3] Es sei  $G = \text{SO}(3)$ . Wir parametrisieren Elemente aus  $G$  durch die drei Euler-Winkel:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_3(\alpha)R_2(\beta)R_3(\gamma),$$

wobei

$$R_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad R_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Interpretieren Sie nun  $R(\alpha, \beta, \gamma)$  als Element der dreidimensionalen Fundamentaldarstellung und bestimmen Sie den Charakter  $\chi(\alpha, \beta, \gamma)$ .

5. [4] Konstruieren Sie analog zu Beispiel 2.3.15 der Vorlesung die regulären Darstellungen der Gruppen  $C_4 = \{e, c, c^2, c^3\}$  mit  $c^4 = e$  und der Klein'schen oder Vier-Gruppe  $V = \{e, a, b, c\}$  mit  $a^2 = b^2 = c^2 = e$  (siehe Übung 1, Aufgabe 2.).

Hinweis: Die Matrizen der regulären Darstellung sind durch

$$gg_i = \sum_{j=1}^{|G|} D_{ji}(g)g_j, \quad i = 1, \dots, |G|,$$

definiert. Nummerieren Sie  $g_1 = e$ ,  $g_2 = c$ ,  $g_3 = c^2$  und  $g_4 = c^3$  bzw.  $g_1 = e$ ,  $g_2 = a$ ,  $g_3 = b$  und  $g_4 = c$ .

6. Wir betrachten die abstrakte Gruppe  $D_3$  mit den sechs Elementen  $\{e, c, c^2, b, bc, bc^2\}$  (siehe Beispiel 1.2.8 der Vorlesung).

(a) [3] Konstruieren Sie eine zweidimensionale Darstellung auf dem  $\mathbb{R}^2$ , indem Sie die Gruppenelemente geometrisch als (aktive) Drehungen um den Ursprung bzw. Spiegelungen interpretieren. Beispiel:

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(c) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wählen Sie für  $b$  eine Spiegelung an der  $x$ -Achse.

(b) [1] Wie lautet der Charakter für die 6 Gruppenelemente?

(c) [4] Wie lauten die 4 sechsdimensionalen Vektoren  $\{D_{ij}(e), D_{ij}(c), \dots, D_{ij}(bc^2)\}$ . Verifizieren Sie explizit die  $4 + 3 + 2 + 1 = 10$  Orthogonalitätsrelationen

$$\sum_g D_{ir}(g) D_{js}^*(g) = \frac{6}{2} \delta_{ij} \delta_{rs}.$$

7. [3] Die Voraussetzungen seien wie in Satz 2.3.3 der Vorlesung.

$$\sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{js}^{(\nu)*}(g) = \frac{|G|}{n_\mu} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{rs}. \quad (*)$$

Zeigen Sie

$$\sum_{\mu=1}^r n_\mu^2 \leq |G|.$$

Hinweis:  $\mu$  nummeriert die nichtäquivalenten, irreduziblen, unitären Darstellungen von  $G$ ,  $r$  ist deren Anzahl.

1. Schritt: Es sei  $\mu = \nu = 1$  mit  $n_1$  der Dimensionalität des Vektorraums, auf dem  $D^{(1)}$  operiert. Betrachten Sie festes  $i$  und  $r$ . Interpretieren Sie  $(D_{ir}^{(1)}(g_1), \dots, D_{ir}^{(1)}(g_{|G|}))$  als Vektor in einem  $|G|$ -dimensionalen Raum. Interpretieren Sie Gl. (\*) als Aussage für ein Skalarprodukt. Wieviele solcher Vektoren gibt es für  $\mu = \nu = 1$  (Betrachten Sie die Anzahl der Einträge von  $D^{(1)}(g)$ . Die Indizes  $i$  und  $r$  können die Werte 1 bis  $n_1$  annehmen.)? Interpretieren Sie Gl. (\*) als Orthogonalitätsrelation.

2. Schritt: Wiederholen Sie die Überlegungen für  $\mu = 2$  usw.

3. Schritt: Addieren Sie die Resultate für die einzelnen  $\mu$ .

4. Schritt: Wieviele orthogonale Vektoren kann es in einem  $|G|$ -dimensionalen Raum maximal geben?

## Übung 10

1. [5] Gegeben sei die Gruppe  $C_3 = \{e, c, c^2\}$  mit  $c^3 = e$ . Bestimmen Sie analog zur Vorlesung die Charaktertabelle der irreduziblen Darstellungen.
2. Wir betrachten für die Gruppe  $D_3$  die so genannte Vektordarstellung  $D_3^V$  auf dem Vektor-Raum  $\mathbb{R}^3$ . Diese ist definiert über die Wirkung einer Drehung um  $120^\circ$  um die  $z$ -Achse und um  $180^\circ$  um die  $x$ -Achse, d.h.

$$D_3^V(c) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_3^V(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) [2] Bestimmen Sie die Matrizen  $D_3^V(c^2)$ ,  $D_3^V(bc)$  und  $D_3^V(bc^2)$ . Beachten Sie, dass  $D_3^V$  eine Darstellung ist.
- (b) [2]  $D_3^V(bc)$  und  $D_3^V(bc^2)$  stellen Drehungen um  $180^\circ$  bzgl. der Drehachsen  $\hat{n}(bc)$  und  $\hat{n}(bc^2)$  dar. Bestimmen Sie diese Drehachsen. Hinweis: Interpretieren Sie die Drehachsen als Eigenvektoren mit Eigenwert 1.
- (c) [1] Bestimmen Sie für die drei Konjugationsklassen  $K_i$  den Wert des Charakters von  $D_3^V$ .
- (d) [2] Bestimmen Sie nun die Koeffizienten  $a_i^V$  der Clebsch-Gordan-Zerlegung

$$D_3^V = a_1^V D^{(1)} \oplus a_2^V D^{(2)} \oplus a_3^V D^{(3)}.$$

3. [3] Sei  $G = D_3$ . Bestimmen Sie analog zur Vorlesung die Koeffizienten  $a_k^{ij}$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ , der Clebsch-Gordan-Zerlegung des inneren Tensorprodukts

$$D^{(i)} \otimes D^{(j)} = a_1^{ij} D^{(1)} \oplus a_2^{ij} D^{(2)} \oplus a_3^{ij} D^{(3)}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Orthogonalitätsrelation für Charaktere irreduzibler Darstellungen und die Tatsache, dass der Charakter einer inneren Tensorprodukt-darstellung gleich dem Produkt der Charaktere ist.

4. [5] Wieviele reelle Parameter benötigt man zur Beschreibung der Gruppen
  - $\text{SL}(n, \mathbb{C}) = \{A | A \in \text{GL}(n, \mathbb{C}), \det(A) = 1\}$ ,
  - $\text{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A | A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}), \det(A) = 1\}$ ,
  - $\text{SU}(n) = \{A | A \in \text{U}(n), \det(A) = 1\}$ ,
  - $\text{O}(n, \mathbb{C}) = \{A | A \in \text{GL}(n, \mathbb{C}), A^T A = A A^T = 1_{n \times n}\}$ ,

- $O(n, \mathbb{R}) = \{A \mid A \in GL(n, \mathbb{R}), A^T A = AA^T = 1_{n \times n}\}$ ?

5. Es sei  $G$  eine endliche Gruppe mit Konjugationsklassen  $K_i$  und  $D^{(\mu)}$  eine  $n_\mu$ -dimensionale, irreduzible Darstellung auf dem  $K$ -Vektorraum  $V_\mu$ .

(a) [2] Zeigen Sie, dass die Matrix

$$B_i^\mu := \sum_{g \in K_i} D^{(\mu)}(g)$$

für eine beliebige aber feste Konjugationsklasse  $K_i$  von der Form  $B_i^\mu = \lambda_i^\mu I$  ist, wobei  $I$  die Identität auf  $V_\mu$  ist.

Hinweis: Benutzen Sie das Lemma von Schur aus 2.3.2.

(b) [1] Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen dem so genannten Dirac-Charakter  $\lambda_i^\mu$ , der Anzahl  $k_i$  von Elementen der Konjugationsklasse  $K_i$ , dem Charakter  $\chi_i^{(\mu)}$  der Konjugationsklasse  $K_i$  und der Dimension  $n_\mu$  der Darstellung  $D^{(\mu)}$  her.

6. [2] Es sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $D$  eine endlichdimensionale, irreduzible Darstellung. Betrachten Sie die zu  $D$  komplex konjugierte Darstellung  $D^*$ . Zeigen Sie, dass für äquivalente  $D$  und  $D^*$ , d.h.

$$D(g) = SD^*(g)S^{-1} \quad \forall g \in G, \quad (*)$$

$SS^* = \lambda I$  folgt.

Hinweis: Betrachten Sie die zu  $(*)$  komplex konjugierte Gleichung und setzen Sie das Resultat für  $D^*(g)$  in  $(*)$  ein. Wenden Sie das Lemma von Schur aus 2.3.2 an.

7. [3] Wir betrachten die Gruppe  $O(2)$ . Gegeben sei ein Element  $A$  aus dem Zweig  $SO(2)$  und ein Element  $B$  aus dem Zweig  $S_2SO(2)$  (siehe 1.3.5 der Vorlesung) mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi,$$

$$B = \begin{pmatrix} -\cos(\beta) & \sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \beta < 2\pi.$$

Berechnen Sie den Abstand

$$d(A, B) := \|A - B\| = \left[ \sum_{i,j=1}^2 (A_{ij} - B_{ij})^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

## Übung 11

1. Zeigen Sie für die folgenden Transformationen, dass es sich dabei um Lie-Gruppen handelt. Überprüfen Sie zunächst die Gruppeneigenschaften und geben Sie anschließend die Funktionen  $\phi_i(a; b)$  für die kontinuierlichen Parameter an. Bestimmen Sie schließlich  $\rho_L(b)$  und  $\rho_R(b)$ .

(a) [4]  $x' = ax, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

(b) [5]  $x' = a_1x + a_2, a_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, a_2 \in \mathbb{R}$ .

2. [2] Zeigen Sie, dass die Lie-Gruppe  $GL(n, \mathbb{R})$  für alle  $n \geq 1$  nicht zusammenhängend ist.

Hinweis: Führen Sie einen Beweis durch Widerspruch. Nehmen Sie an, dass ein Pfad  $g : [0, 1] \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  mit  $t \mapsto g(t)$  existiert mit der Eigenschaft  $\det(g(0)) > 0$  und  $\det(g(1)) < 0$ . Betrachten Sie die stetige Abbildung  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi(t) = \det(g(t))$  und wenden Sie den Nullstellensatz von Bolzano an.

3. Gegeben sei  $\mathfrak{so}(n) := \{B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid B^T = -B\}$ , d. h. die Menge aller schiefssymmetrischen, reellen  $(n, n)$ -Matrizen ( $n \geq 2$ ).

(a) [1] Zeigen Sie, dass  $\mathfrak{so}(n)$  mit den Verknüpfungen Matrizenaddition und Skalarmultiplikation ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist.

(b) [1] Zeigen Sie, dass durch

$$[A, B] := AB - BA \quad \forall A, B \in \mathfrak{so}(n)$$

mit  $AB$  als Matrizenmultiplikation eine abgeschlossene, bilineare Multiplikation definiert ist (Überprüfen Sie die Abgeschlossenheit und die Linearität im ersten und zweiten Faktor).

(c) [1] Überprüfen Sie die Antikommutativität und die Jacobi-Identität.

(d) [1] Wie lautet die Dimension von  $\mathfrak{so}(3)$ , d. h. was ist die Anzahl der Basisvektoren?

4. [2] Gegeben sei die Drehimpulsalgebra  $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$ . Zeigen Sie, dass das Produkt nicht assoziativ ist:

$$[J_i, [J_j, J_k]] \neq [[J_i, J_j], J_k].$$

5. Gegeben seien die irreduziblen Darstellungen der  $SO(3)$

$$\begin{aligned} D_{mm'}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \langle l, m | \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) | l, m' \rangle^*, \\ \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) &= \exp(-i\alpha l_z) \exp(-i\beta l_y) \exp(-i\gamma l_z), \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} l &= 0, 1, \dots, \\ m &= -l, -l+1, \dots, l-1, l, \\ m' &= -l, -l+1, \dots, l-1, l. \end{aligned}$$

- (a) [2] Begründen Sie die Faktoren  $\delta_{m_1 m_2} \delta_{m'_1 m'_2}$  in der Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin(\beta) d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma D_{m_1 m'_1}^{(l_1)*}(\alpha, \beta, \gamma) D_{m_2 m'_2}^{(l_2)}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{8\pi^2}{2l_1 + 1} \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2} \delta_{m'_1 m'_2}.$$

- (b) [1] Was erhalten Sie mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation für

$$\int_0^\pi \sin(\beta) d\beta d_{m_1 m'_1}^{(l_1)*}(\beta) d_{m_1 m'_1}^{(l_2)}(\beta)$$

mit festen  $m_1$  und  $m'_1$ ?

Hinweis: Siehe Übung 6, Aufgabe 4.

$$D_{mm'}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) = \exp(im\alpha) d_{mm'}^{(l)}(\beta) \exp(im'\gamma).$$

6. [3] Gegeben sei die Drehimpulsalgebra  $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$ . Konstruieren Sie mit Hilfe von

$$J_\pm |j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle, \quad J_3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle, \quad \langle j, m | j, m'\rangle = \delta_{mm'},$$

wobei  $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$ , eine dreidimensionale Darstellung ( $j = 1$ ) der Drehimpulsalgebra.

7. [2] Zeigen Sie  $\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1)$  für  $j_1, j_2 \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$ .

## Übung 12

1. Es sei  $\mathcal{L}$  eine Lie-Algebra mit Basis  $\{L_1, \dots, L_n\}$  und den Vertauschungsrelationen

$$[L_\alpha, L_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma L_\gamma.$$

- (a) [1] Zeigen Sie  $C_{\alpha\beta}^\gamma = -C_{\beta\alpha}^\gamma$ .

- (b) [3] Zeigen Sie  $C_{\beta\mu}^\alpha C_{\gamma\delta}^\mu + C_{\gamma\mu}^\alpha C_{\delta\beta}^\mu + C_{\delta\mu}^\alpha C_{\beta\gamma}^\mu = 0$ .

2. Es sei  $\mathcal{L}$  eine Lie-Algebra mit Basis  $\{L_1, \dots, L_n\}$ .

- (a) [2] Zeigen Sie, dass die durch

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^n T_{kj}(L_i) L_k, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

definierten  $(n, n)$ -Matrizen  $T(L_i)$  eine  $n$ -dimensionale Darstellung der Lie-Algebra erzeugen.

- (b) [1] Zeigen Sie, dass die Strukturkonstanten als Einträge von  $(n, n)$ -Matrizen interpretiert werden können, die eine  $n$ -dimensionale Darstellung (adjungierte Darstellung) definieren.
- (c) [2] Es sei  $\{\sigma_1/2, \sigma_2/2, \sigma_3/2\}$  eine Basis der Lie-Algebra  $\mathfrak{su}(2)$ . Wie lauten die zugehörigen Basisvektoren der adjungierten Darstellung?
- (d) [2] Es sei  $X \in \mathcal{L}$ . Wir definieren eine lineare Transformation  $ad(X)$  durch

$$ad(X)(Y) = [X, Y], \quad Y \in \mathcal{L}.$$

Zeigen Sie, dass (a) und (d) gleichwertige Definitionen für die adjungierte Darstellung liefern.

3. Gegeben sei die Basis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

der Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}(2, C)$ .

- (a) [1] Bestimmen Sie die Kommutatoren.
- (b) [2] Bestimmen Sie die Vektoren  $ad(e_i)$  der adjungierten Darstellung.
4. [3] Es seien  $U = u_i e_i$  und  $V = v_i e_i$  zwei Vektoren einer Lie-Algebra  $\mathcal{L}$ . Die so genannte Killing-Form ist durch

$$B(U, V) = \text{Tr}(ad(U)ad(V))$$

definiert. Zeigen Sie für  $\mathcal{L} = \mathfrak{sl}(2, C)$  mit der Basis aus Aufgabe 3., dass  $B(U, V) = u^T B v$  mit

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

5. [3] Es sei  $G$  eine klassische Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathcal{L}G$ . Verifizieren Sie durch Taylor-Reihenentwicklung für  $C, D \in \mathcal{L}G$  und  $t \in \mathbb{R}$
- $$\exp(tC) \exp(tD) \exp(-tC) \exp(-tD) = I + t^2[C, D] + \mathcal{O}(t^3), \quad t \rightarrow 0.$$

6. [3] Gegeben sei die Basis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

der Lie-Algebra  $\mathfrak{gl}(2, K)$ . Konstruieren Sie die Vektoren  $ad(e_i)$  der adjungierten Darstellung.

## Übung 13

1. [3] Gegeben sei die Zerlegung

$$|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle = \sum_{j,m} \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{array} \right) |(j_1 j_2) j m\rangle.$$

Leiten Sie mit Hilfe von

$$\sum_{m_1, m_2} \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j' \\ m_1 & m_2 & m' \end{array} \right) = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

die Beziehung

$$|(j_1 j_2) j m\rangle = \sum_{m_1, m_2} \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{array} \right) |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle$$

her.

2. [6] Bestimmen Sie in 4.3.2, Schritt 3. der Vorlesung in Analogie zu Schritt 2. die Koeffizienten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} |(j_1 j_2) j_1 + j_2 - 2, j_1 + j_2 - 2\rangle &= \alpha |(j_1 j_1; j_2 j_2 - 2) \\ &\quad + \beta |j_1 j_1 - 1; j_2 j_2 - 1\rangle \\ &\quad + \gamma |j_1 j_1 - 2; j_2 j_2\rangle. \end{aligned}$$

3. [7] Bestimmen Sie analog zur Vorlesung mittels der Leiteroperatoren die Clebsch-Gordan-Koeffizienten

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array} \right), \\ &\left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Hinweis: Falls möglich, können Sie auch von den Symmetrieeigenschaften aus Anmerkungen 4.3.5 der Vorlesung Gebrauch machen.

4. [4] Leiten Sie mit Hilfe von  $\langle (j_1 j_2) j m | J_{\pm} | j_1 m_1; j_2 m_2 \rangle$ ,  $J_{\pm} = J_1 \pm i J_2$ , die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} &\sqrt{(j \pm m)(j \mp m + 1)} \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \mp 1 \end{array} \right) \\ &= \sqrt{(j_1 \mp m_1)(j_1 \pm m_1 + 1)} \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 \pm 1 & m_2 & m \end{array} \right) \\ &\quad + \sqrt{(j_2 \mp m_2)(j_2 \pm m_2 + 1)} \left( \begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 \pm 1 & m \end{array} \right) \end{aligned}$$

her.



5. [4] Es sei  $B = \varphi \mathcal{T}_3$  mit  $0 \leq \varphi < 2\pi$  und

$$\mathcal{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifizieren Sie explizit

$$\exp(B) = R_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Übung 14

1. [8] Gegeben seien die Zustände

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix} 11 \right\rangle &:= \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix} \right\rangle \otimes \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix} \right\rangle = \left| \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 22 & 22 \end{pmatrix} \right\rangle, \\ \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix} 10 \right\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 22 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \frac{11}{22} \right\rangle, \\ \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix} 1 - 1 \right\rangle &:= \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle, \\ \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix} 00 \right\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 22 & 2 \end{pmatrix}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \frac{11}{22} \right\rangle. \end{aligned}$$

Berechnen Sie für jeden der 4 Zustände die Eigenwerte zu den Operatoren  $J_3 := J_3(1) + J_3(2)$  und  $\vec{J}^2 := [\vec{J}(1) + \vec{J}(2)]^2 = \vec{J}^2(1) + \vec{J}^2(2) + 2\vec{J}(1) \cdot \vec{J}(2)$ .

Hinweis: Drücken Sie  $2\vec{J}(1) \cdot \vec{J}(2)$  mit Hilfe der Auf- und Absteigeoperatoren  $J_{\pm}(1)$  und  $J_{\pm}(2)$  sowie  $J_3(1)$  und  $J_3(2)$  aus.

2. [6] Konstruieren Sie analog zu 4.3.6 und 4.3.8 der Vorlesung

$$d_{-1,1}^{(1)}(\beta), \quad d_{0,0}^{(1)}(\beta), \quad d_{0,1}^{(1)}(\beta).$$

3. Es sei

$$\begin{aligned} T_A &:= T(n\pi^+ \rightarrow n\pi^+), \\ T_B &:= T(n\pi^+ \rightarrow p\pi^0). \end{aligned}$$

(a) [4] Drücken Sie mit Hilfe von Gl. (4.19) der Vorlesung  $T_A$  und  $T_B$  durch die Isospinamplituden  $T_{\frac{1}{2}}$  und  $T_{\frac{3}{2}}$  aus.

(b) [2] Bestimmen Sie  $|T_A|^2 + |T_B|^2$ . Beachten Sie, dass  $T_A$  und  $T_B$  komplexe Zahlen sind.

- 
4. In der Theorie der starken Wechselwirkung werden die drei leichtesten Mesonen, die so genannten Pionen, durch ein Isospintriplett beschrieben:

$$|\pi^+\rangle := |11\rangle, \quad |\pi^0\rangle := |10\rangle, \quad |\pi^-\rangle := |1-1\rangle.$$

Hierbei charakterisieren  $I = 1$  und  $M = \pm 1, 0$  die Eigenwerte  $I(I + 1) = 2$  und  $M$  zu den Operatoren  $\vec{I}^2$  und  $I_3$  im Isospinraum. Möchte man nun die Streuung zweier Pionen beschreiben, dann ist es günstig eine „gekoppelte“ Basis zu verwenden (siehe Gl. (4.19)). Zum Beispiel gilt

$$|(11)22\rangle = |11; 11\rangle = |\pi^+, \pi^+\rangle,$$

d. h.

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = 1.$$

- (a) [1] Bestimmen Sie mit den Symmetrieeigenschaften aus 4.3.5 den CG-Koeffizienten

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{array} \right).$$

- (b) [1] Bestimmen Sie mit 4.3.2 den CG-Koeffizienten

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

- (c) [1] Bestimmen Sie nun mit den Symmetrieeigenschaften aus 4.3.5 die CG-Koeffizienten

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

- (d) [1] Bestimmen Sie mit 4.3.2 den CG-Koeffizienten

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

- (e) [1] Bestimmen Sie nun mit den Symmetrieeigenschaften aus 4.3.5 die CG-Koeffizienten

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

- (f) [2] Bestimmen Sie durch Anwenden des Absteigeoperators auf

$$|(11)11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|11; 10\rangle - |10; 11\rangle)$$

die beiden CG-Koeffizienten

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

- (g) [1] Bestimmen Sie auf Grund von Symmetrieüberlegungen den CG-Koeffizienten

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

- (h) [1] Benutzen Sie schließlich das Resultat aus Übung 13, Aufgabe 2.,

$$|(11)00\rangle = \alpha|11; 1-1\rangle + \beta|10; 10\rangle + \gamma|1-1; 11\rangle$$

zur Bestimmung der CG-Koeffizienten

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Fazit: Sie haben nun alle Clebsch-Gordan-Koeffizienten bestimmt, um die physikalischen  $\pi\pi$ -Streuamplituden durch die Isospinamplituden  $T_0$ ,  $T_1$  und  $T_2$  auszudrücken.

## Übung 15

- Wir betrachten den starken Zerfall einer Nukleon-Resonanz  $N^*$  mit Isospin  $I = \frac{1}{2}$  in einen  $N\pi$ -Endzustand.
  - [1] Wieviele unabhängige Isospinamplituden benötigt man zur Beschreibung des Zerfalls?
  - [2] Wie sind die Amplituden für die Zerfälle  $N^{*+} \rightarrow n\pi^+$  und  $N^{*+} \rightarrow p\pi^0$  miteinander verknüpft?
  - [1] Die Rate  $1/\tau$  eines Zerfalls ist proportional zum Absolutquadrat des Matrixelementes. Welches Verhältnis der Raten bekommen Sie für die beiden Zerfälle?
- [3] Wie in der Vorlesung besprochen benötigt man zur Beschreibung  $NN \rightarrow NN$  zwei Isospinamplituden  $T_1$  und  $T_0$ . Drücken Sie die Amplitude für den Ladungsaustausch  $pn \rightarrow np$  durch die Amplituden für  $pp \rightarrow pp$  und  $pn \rightarrow pn$  aus (Reihenfolge beachten, d. h.  $pn \neq np$ ).
- [4] Gegeben seien die Pauli-Matrizen

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \tau_{+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 + i\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tau_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 - i\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \tau_0 &= \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vorsicht: Hierbei handelt es sich **nicht** um sphärische Notation! Meistens wird für  $\tau_{+1}$  und  $\tau_{-1}$  verkürzt  $\tau_+$  und  $\tau_-$  geschrieben.

Zeigen Sie für  $\alpha = +1, 0, -1$

$$\frac{1}{2}[\tau_{-\alpha}, \tau_0] = \alpha\tau_{-\alpha}, \quad \frac{1}{2}\{\tau_{-\alpha}, \tau_0\} = \delta_{\alpha 0}\mathbb{1}.$$

4. [1] Wir beschreiben ein Proton und ein Neutron durch die Isospinoren

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Drücken Sie den Ladungsoperator  $Q$  durch die Pauli-Matrizen und die Einheitsmatrix  $\mathbb{1}$  aus.

5. In der Vorlesung hatten wir argumentiert, dass die elektromagnetische Produktion eines Pions an einem Nukleon,  $\gamma^*N \rightarrow N'\pi^\alpha$ , durch 3 Isospinamplituden beschrieben werden kann. In der Literatur wird normalerweise folgende Parametrisierung benutzt:

$$A(\pi^\alpha) = \chi_f^\dagger(\alpha\tau_{-\alpha}A^{(-)} + \tau_{-\alpha}A^{(0)} + \delta_{\alpha 0}A^{(+)})\chi_i,$$

wobei  $\chi_i$  und  $\chi_f$  die Isospinoren des Nukleons im Anfangs- und Endzustand sind.

- (a) [4] Verifizieren Sie nun mit Hilfe von Aufgabe 3.

$$\begin{aligned} A(\gamma^*p \rightarrow n\pi^+) &= \sqrt{2}(A^{(-)} + A^{(0)}), \\ A(\gamma^*n \rightarrow p\pi^-) &= \sqrt{2}(-A^{(-)} + A^{(0)}), \\ A(\gamma^*p \rightarrow p\pi^0) &= A^{(0)} + A^{(+)}, \\ A(\gamma^*n \rightarrow n\pi^0) &= -A^{(0)} + A^{(+)}, \end{aligned}$$

wobei  $\gamma^*$  für ein (reelles oder virtuelles) Photon steht.

- (b) [1] Überzeugen Sie sich davon, dass die Formel für den unphysikalischen Prozess  $\gamma p \rightarrow p\pi^+$  Null ergibt.

6. [3] Drücken Sie die Amplitude  $A(\gamma^*n \rightarrow n\pi^0)$  durch die Amplituden der drei anderen physikalischen Prozesse aus.

7. [2] Gegeben seien die Massen  $m_p = 938.3$  MeV,  $m_n = 939.6$  MeV,  $m_{\pi^\pm} = 139.6$  MeV und  $m_{\pi^0} = 135.0$  MeV. Als Schwerpunktsenergie  $W$  der Reaktion  $\gamma^*(k) + N(p_i) \rightarrow N(p_f) + \pi(q)$  bezeichnet man die Wurzel aus der so genannten Mandelstam-Variablen  $s = (p_i + k)^2 = (p_f + q)^2$ . Die Schwellenenergie (threshold energy) ergibt sich, wenn beide Teilchen im Endzustand im Schwerpunktsystem in Ruhe sind. Bestimmen Sie die Schwellenenergie  $W_{\text{thr}}$  für die vier physikalischen Prozesse.

8. [4] Geben Sie die Werte für die folgenden Clebsch-Gordan-Koeffizienten an:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc|c} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Hinweis: Verwenden Sie schon bekannte Resultate aus Vorlesung/Übung. Geben Sie explizit ein Stichwort an.

9. Wir betrachten noch einmal die Pion-Nukleon-Streuung.

- (a) [2] Drücken Sie mit Hilfe von Gl. (4.19) der Vorlesung  $\langle p\pi^- | T | p\pi^- \rangle$  und  $\langle p\pi^+ | T | p\pi^+ \rangle$  durch  $T_{\frac{1}{2}}$  und  $T_{\frac{3}{2}}$  aus.
- (b) [1] Im Bereich der Delta-Resonanz können Sie  $T_{\frac{1}{2}}$  gegenüber  $T_{\frac{3}{2}}$  vernachlässigen. Was erhalten Sie für das Verhältnis  $\sigma(p\pi^+)/\sigma(p\pi^-)$  der elastischen Wirkungsquerschnitte?

## Übung 16

1. Die  $\pi\pi$ -Streuung spielt eine zentrale Rolle bei der Fragestellung nach der spontanen Symmetriebrechung in der QCD. Dabei ist man insbesondere an den Streuamplituden bei sehr niedrigen Energien interessiert. Hierzu gibt es gegenwärtig sowohl von experimenteller als auch von theoretischer Seite vielseitige Aktivitäten.

- (a) [1] Wieviele Isospinamplituden benötigt man zur Beschreibung der  $\pi\pi$ -Streuung?
- (b) [8] Wir schreiben

$$\langle I' I'_3 | T | I I_3 \rangle = T_I \delta_{II'} \delta_{I_3 I'_3}.$$

Drücken Sie die physikalischen Prozesse

$$\begin{aligned} \pi^+ \pi^+ &\rightarrow \pi^+ \pi^+, \\ \pi^+ \pi^0 &\rightarrow \pi^+ \pi^0, \\ \pi^0 \pi^0 &\rightarrow \pi^0 \pi^0, \\ \pi^+ \pi^- &\rightarrow \pi^0 \pi^0 \end{aligned}$$

durch die Isospinamplituden  $T_I$  aus.

Hinweis:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) &= \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) &= 0, & \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, & \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) &= \frac{1}{\sqrt{6}}, \\ \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) &= \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

2. [3] Gegeben sei der Zustand eines  $\pi^0$  in der Quark-Antiquarkdarstellung aus 5.3.1 der Vorlesung:

$$|\pi^0\rangle = |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} - u\bar{u}).$$

Bestimmen Sie durch eine weitere Anwendung des Absteigeoperators auf beiden Seiten den Zustand eines  $\pi^-$ .

3. [3] Es sei  $X$  ein  $N_C$ -dimensionaler komplexer Hilbert-Raum mit Orthonormalbasis  $\{\chi_a\}$  und  $X^*$  mit ONB  $\{\chi_a^*\}$  der zu  $X$  duale Raum. Hierbei steht  $N_C$  (number of colors) für die Anzahl der Farbfreiheitsgrade mit  $N_C = 3$  in der QCD.

Der Farbzustand eines Mesons werde durch

$$X \otimes X^* \ni |M\rangle_C = \frac{1}{\sqrt{N_C}} \delta_{ab} \chi_a \otimes \chi_b^* = \frac{1}{\sqrt{N_C}} \chi_a \otimes \chi_a^*$$

beschrieben. Wir benutzen die Einstein'sche Summenkonvention, so dass eine Summation über wiederholt auftretende Indizes impliziert ist. Das Transformationsverhalten unter  $SU(N_C)$ -Farbtransformationen lautet

$$|M\rangle_C \mapsto |M'\rangle_C = \frac{1}{\sqrt{N_C}} (U\chi_a) \otimes (U^*\chi_a^*).$$

Zeigen Sie, dass  $|M'\rangle_C = |M\rangle_C$  gilt.

Hinweis: Benutzen Sie 5.2.3 der Vorlesung, um die Wirkung von  $U$  auf  $\chi_a$  und von  $U^*$  auf  $\chi_a^*$  zu bestimmen. Beachten Sie  $UU^\dagger = \mathbb{1}$ .

Fazit: Die obige Konstruktion ist invariant bzgl. einer  $SU(N_C)$ -Transformation. Man spricht auch von einem farbneutralen Zustand oder einem Farbsingulett.

4. [5] Es sei  $X$  ein dreidimensionaler komplexer Hilbert-Raum mit Orthonormalbasis  $\{\chi_a\}$ . Der Farbzustand eines Baryons werde durch

$$X \otimes X \otimes X \ni |B\rangle_C = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{abc} \chi_a \otimes \chi_b \otimes \chi_c$$

beschrieben. Das Transformationsverhalten unter  $SU(3)$ -Farbtransformationen lautet

$$|B\rangle_C \mapsto |B'\rangle_C = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{abc} (U\chi_a) \otimes (U\chi_b) \otimes (U\chi_c) = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{abc} U_{da} U_{eb} U_{fc} \chi_d \otimes \chi_e \otimes \chi_f.$$

Zu zeigen ist

$$|B'\rangle_C = |B\rangle_C,$$

d. h.

$$\epsilon_{def} = \epsilon_{abc} U_{da} U_{eb} U_{fc}.$$

Hinweise: Für die Determinante einer (3,3)-Matrix  $A$  mit den Einträgen  $a_{ab}$  gilt

$$\det(A) = \epsilon_{abc} a_{1a} a_{2b} a_{3c}.$$

Beachten Sie, dass  $\det(U)=1$ .

Fazit: Auch der Farbzustand eines Baryons ist farbneutral, d. h. ein Farbsingulett.

5. Wir betrachten die Pion-Nukleon-Streuung.

- (a) [2] Identifizieren Sie die acht möglichen physikalischen Prozesse, die sich unter Berücksichtigung der Ladungserhaltung ergeben.

Hinweis: Wegen der Zeitumkehrinvarianz der starken Wechselwirkung zählen z. B.  $p\pi^0 \rightarrow n\pi^+$  und  $n\pi^+ \rightarrow p\pi^0$  nicht als unabhängige Reaktionen.

- (b) [4] Drücken Sie die acht Prozesse durch die Isospinamplituden aus.

Fazit: Isospinsymmetrie ist sehr nützlich! Um die acht physikalischen Prozesse zu beschreiben, genügt die Kenntnis von zwei unabhängigen Isospinamplituden  $T_{\frac{3}{2}}$  und  $T_{\frac{1}{2}}$ . Der Rest wird durch Clebsch-Gordan-Koeffizienten geregelt.

## Übung 17

1. [3] Gegeben seien die gemischt antisymmetrischen Zustände

$$\begin{aligned} \left| \left[ \left( \frac{11}{22} \right) 0 \frac{1}{2} \right] \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(udu - duu), \\ \left| \left[ \left( \frac{11}{22} \right) 0 \frac{1}{2} \right] \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(dud - udd) \end{aligned}$$

aus Beispiel 5.3.3 der Vorlesung. Verifizieren Sie explizit mit Hilfe des Absteigeoperators  $I_- = I_-(1) + I_-(2) + I_-(3)$ , dass  $\left| \left[ \left( \frac{11}{22} \right) 0 \frac{1}{2} \right] \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = I_- \left| \left[ \left( \frac{11}{22} \right) 0 \frac{1}{2} \right] \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$  gilt.

2. In dieser Übungsaufgabe wollen wir alle Spin-Flavor-Zustände der Delta-Resonanz und des Nukleons zusammenstellen.

- (a) [3] Konstruieren Sie analog zur Vorlesung die Spin-Flavor-Zustände für  $\Delta^{++}(S_z = 1/2)$ ,  $\Delta^{++}(S_z = -1/2)$  und  $\Delta^{++}(S_z = -3/2)$ . Wie erhält man  $\Delta^{++}(S_z = -1/2)$  aus  $\Delta^{++}(S_z = 1/2)$  und  $\Delta^{++}(S_z = -3/2)$  aus  $\Delta^{++}(S_z = 3/2)$ ?

- (b) [4] Konstruieren Sie die Spin-Flavor-Zustände für  $\Delta^+(S_z = 3/2)$ ,  $\Delta^+(S_z = 1/2)$ ,  $\Delta^+(S_z = -1/2)$  und  $\Delta^+(S_z = -3/2)$ . Wie erhält man  $\Delta^+(S_z = -1/2)$  aus  $\Delta^+(S_z = 1/2)$  und  $\Delta^+(S_z = -3/2)$  aus  $\Delta^+(S_z = 3/2)$ ?
- (c) [2] Wie lassen sich nun die entsprechenden Ausdrücke für  $\Delta^0$  und  $\Delta^-$  aus den obigen Resultaten herleiten?
- (d) [3] Konstruieren Sie den Spin-Flavor-Zustand für  $p(S_z = -1/2)$ . Wie erhält man diesen aus  $p(S_z = 1/2)$ ? Beachten Sie insbesondere das Vorzeichen! Manche Bücher geben hier das falsche Vorzeichen an.
- (e) [3] Verifizieren Sie (d), indem Sie  $J_-$  auf  $p(S_z = 1/2)$  anwenden. Beachten Sie, dass  $J_- = J_-(1) + J_-(2) + J_-(3)$  gilt.  
Hinweis: Zur Illustration der Vorgehensweise betrachten wir

$$\begin{aligned}
 J_-(u \uparrow u \uparrow d \downarrow) &= (J_-(1)u \uparrow) u \uparrow d \downarrow \\
 &\quad + u \uparrow (J_-(2)u \uparrow) d \downarrow \\
 &\quad + u \uparrow u \uparrow (J_-(3)d \downarrow) \\
 &= u \downarrow u \uparrow d \downarrow + u \uparrow u \downarrow d \downarrow.
 \end{aligned}$$

- (f) [2] Wie lauten die Spin-Flavor-Zustände für  $n(S_z = 1/2)$  und  $n(S_z = -1/2)$  (entweder explizit ausrechnen oder begründen).

3. In der Vorlesung sind wir bei der Konstruktion der Isospinzustände dergestalt vorgegangen, dass wir zunächst Quark 1 und Quark 2 zu  $I_{12} = 1$  bzw.  $I_{12} = 0$  gekoppelt haben. Der Index „12“ soll uns daran erinnern, dass Quark 1 mit Quark 2 gekoppelt wurde. Anschließend haben wir die Resultate mit Quark 3 zu einem Gesamtisospin  $I = \frac{3}{2}$  und  $I = \frac{1}{2}$  bzw.  $I = \frac{1}{2}$  gekoppelt. Wir wollen uns nun davon überzeugen, dass eine andere Reihenfolge der Kopplung zu *äquivalenten* Resultaten führt.

Dazu koppeln wir zunächst Quark 2 mit Quark 3 zu  $I_{23} = 1$  bzw.  $I_{23} = 0$  und erhalten die Zustände

$$\begin{aligned}
 uu, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du), \quad dd, \\
 \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du).
 \end{aligned}$$

- (a) [4] Koppeln Sie Quark 1 mit der Kombination  $I_{23} = 1$  zu Zuständen mit Gesamtisospin  $I = \frac{3}{2}$ :

$$\left| \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) 1 \right] \frac{3}{2}, M \right\rangle, \quad M = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}.$$



Hinweis:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{array} \right) &= 1 = \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \end{array} \right), \\ \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) = \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Fazit: Für  $I = \frac{3}{2}$  erhalten wir für beide Reihenfolgen der Koppelung identische Resultate.

- (b) [2] Koppeln Sie Quark 1 mit der Kombination  $I_{23} = 1$  zu Zuständen mit Gesamtsospin  $I = \frac{1}{2}$ :

$$\left| \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{11}{22} \right) 1 \right] \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad \text{und} \quad \left| \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{11}{22} \right) 1 \right] \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle.$$

Hinweis:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) &= \frac{1}{\sqrt{3}} = - \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right), \\ \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) &= \sqrt{\frac{2}{3}} = - \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Fazit:  $\left| \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{11}{22} \right) 1 \right] \frac{1}{2}, M \right\rangle$  und  $\left| \left[ \left( \frac{11}{22} \right) 1 \frac{1}{2} \right] \frac{1}{2}, M \right\rangle$  sind nicht identisch.

- (c) [2] Koppeln Sie Quark 1 mit der Kombination  $I_{23} = 0$  zu Zuständen mit Gesamtsospin  $I = \frac{1}{2}$ :

$$\left| \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{11}{22} \right) 0 \right] \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad \text{und} \quad \left| \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{11}{22} \right) 0 \right] \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle.$$

Hinweis:

$$\left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) = 1 = \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Fazit:  $\left| \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{11}{22} \right) 0 \right] \frac{1}{2}, M \right\rangle$  und  $\left| \left[ \left( \frac{11}{22} \right) 0 \frac{1}{2} \right] \frac{1}{2}, M \right\rangle$  sind nicht identisch.

- (d) [3] Drücken Sie  $\left| \left[ \left( \frac{11}{22} \right) 1 \frac{1}{2} \right] \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$  als Linearkombination von  $\left| \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{11}{22} \right) 1 \right] \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$  und  $\left| \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{11}{22} \right) 0 \right] \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$  aus:

$$\left| \left[ \left( \frac{11}{22} \right) 1 \frac{1}{2} \right] \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \alpha \left| \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{11}{22} \right) 1 \right] \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \beta \left| \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{11}{22} \right) 0 \right] \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Bestimmen Sie durch Vergleich der Koeffizienten von  $uud$ ,  $udu$  und  $duu$  die Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$ .

Die Vorgehensweise für die anderen 3 Zustände ist vollständig analog und soll hier nicht weiter verfolgt werden.

Fazit: Solange man *alle* Zustände mit Isospin  $\frac{1}{2}$  betrachtet, spielt es keine Rolle in welcher Reihenfolge die einzelnen Isospins gekoppelt werden.

Bemerkung: Sie haben eine so genannte Umkopplung dreier Drehimpulse durchgeführt. Allgemein wird dies durch die so genannten  $6j$ -Symbole geleistet:

$$|j_1(j_2j_3)j_{23}jm\rangle = \sum_{j_{12}} |[(j_1j_2)j_{12}j_3]jm\rangle (-)^{j_1+j_2+j_3+j} \sqrt{2j_{12}+1} \sqrt{2j_{23}+1} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}.$$

Eine weiterführende Diskussion findet sich in Kapitel 4, *Umkopplung: 6j- und 9j-Symbole* aus A. Lindner, *Drehimpulse in der Quantenmechanik*.

## Übung 18

### 1. $G$ -Konjugation für Pionen

- (a) [1] Wir setzen voraus, dass der Hamilton-Operator der starken Wechselwirkung,  $H_{\text{st}}$ , invariant unter der Ladungskonjugations-  
transformation  $C$  und Isospindrehungen ist:

$$[H_{\text{st}}, C] = 0, \quad [H_{\text{st}}, I_i] = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Zeigen Sie, dass  $H_{\text{st}}$  auch invariant unter  $G = C \exp(i\pi I_2)$  ist.

- (b) [1] Wir beschreiben die drei Pionzustände durch so genannte sphärische Einheitsvektoren (vgl. Analogie zu 4.3.15 der Vorlesung)

$$|\pi^+\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\pi^0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\pi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Drehung um  $-\pi$  bzgl. der 2-Achse wird durch

$$D_2(-\pi) = \begin{pmatrix} \cos(-\pi) & 0 & \sin(-\pi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\pi) & 0 & \cos(-\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Bestimmen Sie die Wirkung von  $D_2(-\pi)$  auf die drei Pionzustände.

- (c) [1] Mit der obigen Phasenkonvention gilt  $C|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle$  und  $C|\pi^\pm\rangle = -|\pi^\mp\rangle$ . Bestimmen Sie  $G|\pi^0\rangle$  und  $G|\pi^\pm\rangle$ .

Fazit:  $G = -1$  für einen Einpionzustand.

- (d) [1] Für einen  $n$ -Pionenzustand  $|\pi^{\alpha_1}\rangle \otimes \cdots \otimes |\pi^{\alpha_n}\rangle$  ( $\alpha_i = +, 0, -$ ) gilt

$$G(|\pi^{\alpha_1}\rangle \otimes \cdots \otimes |\pi^{\alpha_n}\rangle) = (G|\pi^{\alpha_1}\rangle) \otimes \cdots \otimes (G|\pi^{\alpha_n}\rangle).$$

Wie lautet der Eigenwert von  $G$  für  $n$ -Pionenzustände?

- (e) [1] Da  $G$  eine Erhaltungsgröße ist, begründen Sie, welche der folgenden Reaktionen erlaubt/verboten sind:

$$\pi\pi \rightarrow 3\pi, 5\pi, \text{ usw.}, \quad \pi\pi \rightarrow \pi\pi, 4\pi, \text{ usw.}$$

2. Gegeben sei der Ladungsoperator eines nur aus  $u$ - und  $d$ -Quarks bestehenden Baryons:

$$\widehat{Q} = \sum_{i=1}^3 Q(i) = \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{1}{6} + \frac{\tau_3(i)}{2} \right].$$

- (a) [1] Verifizieren Sie, dass  $\widehat{Q}$  angewandt auf ein  $\Delta^{++}(S_z = 3/2)$  den Eigenwert  $+2$  liefert (natürlich ist das Resultat unabhängig von der Spinprojektion).
- (b) [1] Bestimmen Sie analog zur Vorlesung das Matrixelement

$$\langle \Delta^{++}(S_z = \frac{3}{2}) | \widehat{Q} | \Delta^{++}(S_z = \frac{3}{2}) \rangle = 3 \langle \Delta^{++}(S_z = \frac{3}{2}) | Q(3) | \Delta^{++}(S_z = \frac{3}{2}) \rangle.$$

3. [3] Das magnetische Moment eines Protons ist im nichtrelativistischen Quarkmodell gegeben durch das Matrixelement

$$\mu_p = \langle p \uparrow | M_z | p \uparrow \rangle = \langle p \uparrow | \sum_{i=1}^3 \frac{e}{2m} Q(i) \sigma_z(i) | p \uparrow \rangle = \frac{e}{2m} 3 \langle p \uparrow | Q(3) \sigma_z(3) | p \uparrow \rangle.$$

Hierbei ist  $e > 0$  die Elementarladung,  $m$  die Masse des  $u$ - und  $d$ -Quarks im nichtrelativistischen Modell,  $Q(i)$  der Ladungsoperator, der auf das  $i$ te Quark wirkt, und  $\sigma_z(i)$  die Pauli-Matrix, die auf den Spin des  $i$ ten Quarks wirkt.

Berechnen Sie das magnetische Moment  $\mu_p$ .

Hinweis: Die Spin-Flavor-Wellenfunktion  $|p \uparrow\rangle$  wurde in 5.3.2 der Vorlesung diskutiert.

4. (a) [3] Wiederholen Sie die Rechnung aus Aufgabe 3. für ein Neutron.  
Hinweis: Die Spin-Flavor-Wellenfunktion  $|n \uparrow\rangle$  wurde in Übung 17 diskutiert.
- (b) [1] Was ergibt sich für das Verhältnis  $\mu_p/\mu_n$ ? Vergleichen Sie mit dem experimentellen Resultat  $2.79/(-1.91) \approx -1.46$ .

Anmerkung: Die überraschend gute Beschreibung der magnetischen Momente wurde als ein großer Erfolg des Quarkmodells interpretiert.

5. (a) [2] Zeigen Sie, dass die SU(3)-Strukturkonstanten  $f_{abc}$  durch

$$f_{abc} = \frac{1}{4i} \text{Tr}([\lambda_a, \lambda_b] \lambda_c)$$

gegeben sind.

Hinweis: Multiplizieren Sie

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = if_{abd} \frac{\lambda_d}{2}$$

mit  $\lambda_c$ , bilden Sie die Spur, und benutzen Sie

$$\text{Tr}(\lambda_c \lambda_d) = 2\delta_{cd}.$$

- (b) [1] Zeigen Sie, dass  $f_{abc}$  antisymmetrisch bezüglich Vertauschung zweier *beliebiger* Indizes ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Symmetrieeigenschaften von  $\text{Tr}([A, B]C)$ .

6. (a) [2] Zeigen Sie, dass die Konstanten  $d_{abc}$  durch

$$d_{abc} = \frac{1}{4} \text{Tr}(\{\lambda_a, \lambda_b\} \lambda_c)$$

gegeben sind.

- (b) [1] Zeigen Sie, dass  $d_{abc}$  symmetrisch bezüglich Vertauschung zweier *beliebiger* Indizes ist.

7. [4] Berechnen Sie die magnetischen Momente der Delta-Resonanz im nichtrelativistischen Quarkmodell,

$$\mu_{\Delta^{++}} = \langle \Delta^{++}(S_z = \frac{3}{2}) | M_z | \Delta^{++}(S_z = \frac{3}{2}) \rangle = \frac{e}{2m} 3 \langle \Delta^{++}(S_z = \frac{3}{2}) | Q(3) \sigma_z(3) | \Delta^{++}(S_z = \frac{3}{2}) \rangle$$

und analog für  $\mu_{\Delta^+}$ ,  $\mu_{\Delta^0}$  und  $\mu_{\Delta^-}$ .

## Übung 19

1. Die so genannte Axialvektorkopplungskonstante  $g_A$  wird bei der Beschreibung des schwachen Zerfalls eines Neutrons  $n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$  benötigt. Im nichtrelativistischen Quarkmodell wird sie durch das Matrixelement

$$g_A = \langle p \uparrow | \sum_{i=1}^3 \tau_3(i) \sigma_z(i) | p \uparrow \rangle$$

bestimmt.

- (a) [3] Berechnen Sie  $g_A$ .

(b) [2] Bestimmen Sie zum Vergleich

$$\langle n \uparrow | \sum_{i=1}^3 \tau_3(i) \sigma_z(i) | n \uparrow \rangle.$$

Hinweis: Die Spin-Flavor-Wellenfunktionen  $|p \uparrow\rangle$  und  $|n \uparrow\rangle$  wurden in 5.3.2 der Vorlesung und Übung 17 diskutiert.

Anmerkung: Der (an unsere Konvention angepasste) gegenwärtige Wert der *Particle Data Group* (PDG) lautet  $g_A = 1.2695(29)$ .

2. Gegeben seien die Gell-Mann-Matrizen mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] &= i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}, \\ \{\lambda_a, \lambda_b\} &= \frac{4}{3} \delta_{ab} \mathbb{1} + 2 d_{abc} \lambda_c, \\ \text{Tr}(\lambda_a) &= 0, \\ \text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) &= 2 \delta_{ab}. \end{aligned}$$

(a) [2] Verifizieren Sie

$$f_{abc} d_{cde} = \frac{1}{8i} \text{Tr}([\lambda_a, \lambda_b] \{\lambda_d, \lambda_e\}).$$

(b) [2] Zeigen Sie mit Hilfe von (a)

$$f_{abc} d_{cde} + f_{ebc} d_{cda} + f_{dbc} d_{cae} = 0.$$

3. [2] Es sei  $F_a := \lambda_a/2$ . Zeigen Sie, dass die Kombinationen

$$\begin{aligned} C_1 &= F_a^2, \\ C_2 &= d_{abc} F_a F_b F_c \end{aligned}$$

so genannte Casimir-Invarianten sind, d. h.

$$\begin{aligned} [C_1, F_d] &= 0, \quad d = 1, \dots, 8, \\ [C_2, F_d] &= 0, \quad d = 1, \dots, 8. \end{aligned}$$

Hinweis: Benutzen Sie bei der zweiten Identität das Resultat aus Aufgabe 2.

4. [4] Konstruieren Sie graphisch die  $SU(3)$ -Zerlegung  $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$ .

5. [1] Wie lauten die Symmetrieeigenschaften der einzelnen Multipletts? (Hinweis: Schauen Sie sich noch einmal Beispiel 5.3.2 der Vorlesung an.)

6. (a) [2] Bestimmen Sie analog zur Vorlesung die Young-Rahmen für  $n = 4$ .
- (b) [2] Bestimmen Sie nun die Standardtableaus und damit die Gewichte der verschiedenen Young-Rahmen. Wie groß ist die Zahl  $M$  der Standardtableaus für  $n = 4$ ?
- 

7. [2] Wir betrachten die zur Fundamentaldarstellung duale Darstellung  $\Psi_{df} : \mathfrak{su}(3) \rightarrow \mathfrak{gl}(X^*)$  mit

$$\Psi_{df}(B) := -B^T \quad \forall B \in \mathfrak{su}(3).$$

Zeigen Sie, dass  $\Psi_{df}$  die beiden Eigenschaften einer Darstellung aus Definition 3.3.5 der Vorlesung erfüllt.

8. [8] Es sei  $F_a := \lambda_a/2$ , wobei  $\lambda_a$ ,  $a = 1, \dots, 8$  die Gell-Mann-Matrizen sind. Wir definieren

$$T_{\pm} = F_1 \pm iF_2, \quad U_{\pm} = F_6 \pm iF_7, \quad V_{\pm} = F_4 \pm iF_5$$

und

$$T_3 = F_3, \quad Y = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8.$$

Verifizieren Sie die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [T_3, T_{\pm}] &= \pm T_{\pm}, & [Y, T_{\pm}] &= 0, \\ [T_3, U_{\pm}] &= \mp \frac{1}{2}U_{\pm}, & [Y, U_{\pm}] &= \pm U_{\pm}, \\ [T_3, V_{\pm}] &= \pm \frac{1}{2}V_{\pm}, & [Y, V_{\pm}] &= \pm V_{\pm}, \\ [T_+, T_-] &= 2T_3, \\ [U_+, U_-] &= \frac{3}{2}Y - T_3 =: 2U_3, \\ [V_+, V_-] &= \frac{3}{2}Y + T_3 =: 2V_3, \\ [T_+, V_+] &= [T_+, U_-] = [U_+, V_+] = 0, \\ [T_+, V_-] &= -U_-, & [T_+, U_+] &= V_+, \\ [U_+, V_-] &= T_-, & [T_3, Y] &= 0. \end{aligned}$$

Fazit: In einem  $(T_3, Y)$ -Diagramm, in dem die  $Y$ -Achse im Vergleich zur  $T_3$ -Achse um den Faktor  $\sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2 \approx 0.87$  skaliert ist, verschieben die Operatoren  $T_{\pm}$  parallel zur  $T_3$ -Achse, die Operatoren  $V_{\pm}$  und  $U_{\pm}$  parallel zu Achsen, die durch Drehungen um  $60^\circ$  und  $120^\circ$  um den Ursprung aus der  $T_3$ -Achse hervorgehen. Wegen der  $SU(2)$ -Vertauschungsrelationen spricht man auch vom  $T$ -,  $U$ - und  $V$ -Spin.

## Übung 20

1. [3] Es sei  $A \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ , d. h. eine invertierbare komplexe  $(2,2)$ -Matrix.  $X$  sei ein zweidimensionaler komplexer Hilbert-Raum und  $Z = X \otimes X$  das (zweifache) Tensorprodukt mit

$$Z \ni z = t^{i_1 i_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2}.$$

Die Wirkung von  $A$  auf  $X$  wird durch

$$Ae_i = A^j_i e_j$$

beschrieben, wobei  $A^i_j = a_{ij}$  mit  $A = (a_{ij})$ . Laut 5.5.10 der Vorlesung lautet die Produktdarstellung von  $\text{GL}(2, \mathbb{C})$  auf  $Z$  (denken Sie an ein zusammengesetztes System aus zwei Spin-1/2-Zuständen)

$$\varphi(A)(z) = \varphi(A)(t^{i_1 i_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2}) = t^{i_1 i_2} (Ae_{i_1}) \otimes (Ae_{i_2}) = t^{i_1 i_2} A^{j_1}_{i_1} A^{j_2}_{i_2} e_{j_1} \otimes e_{j_2}.$$

Wir betrachten nun die beiden Projektionsoperatoren  $P_1$  und  $P_2$  aus 5.5.9 mit

$$\begin{aligned} P_1(z) &= P_1(t^{i_1 i_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2}) = \frac{1}{2}(t^{i_1 i_2} - t^{i_2 i_1}) e_{i_1} \otimes e_{i_2}, \\ P_2(z) &= P_2(t^{i_1 i_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2}) = \frac{1}{2}(t^{i_1 i_2} + t^{i_2 i_1}) e_{i_1} \otimes e_{i_2}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie

$$\varphi(A)(P_{1/2}(z)) = P_{1/2}(\varphi(A)(z)) \quad \forall z \in Z,$$

d. h.

$$\varphi(A)P_{1/2} = P_{1/2}\varphi(A).$$

Fazit: Wir haben  $Z$  in eine direkte Summe  $P_1(Z)$  und  $P_2(Z)$  zerlegt. Die Produktdarstellung „mischt“ diese Räume nicht. Vorsicht: Wir haben nicht gezeigt, dass sich die Räume nicht noch weiter zerlegen lassen.

2. [3] Zerlegen Sie in  $\text{SU}(6)$   $\square \otimes \square \otimes \square$  in eine direkte Summe. Überprüfen Sie, dass die Summe aus den Dimensionalitäten der resultierenden Multiplets tatsächlich  $6^3 = 216$  ergibt.
3. Wir betrachten die Gruppe  $S_3$  (siehe 1.2.11) mit den Elementen

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e, & \pi_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12), \\ \pi_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13), & \pi_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23), \\ \pi_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123), & \pi_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132) \end{aligned}$$

und der Gruppentafel

$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$
$\pi_2$	$\pi_1$	$\pi_6$	$\pi_5$	$\pi_4$	$\pi_3$
$\pi_3$	$\pi_5$	$\pi_1$	$\pi_6$	$\pi_2$	$\pi_4$
$\pi_4$	$\pi_6$	$\pi_5$	$\pi_1$	$\pi_3$	$\pi_2$
$\pi_5$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_6$	$\pi_1$
$\pi_6$	$\pi_4$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_1$	$\pi_5$

- (a) [8] Bestimmen Sie zu den vier Standardtableaus  $T_1, \dots, T_4$  aus 5.5.6 die zugehörigen Young-Operatoren  $P_1, \dots, P_4$ . Betrachten Sie dazu jeweils die Wirkung der Permutationen  $\pi_i, i = 1, \dots, 6$ , auf die Standardtableaus  $T_j, j = 1, \dots, 4$ , und entscheiden Sie ob  $\pi_i$  in  $V_j, H_j$  oder keinem von beiden ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass  $\varphi$  eine Darstellung von  $S_3$  ist, d. h.

$$\varphi_{\pi_i} \varphi_{\pi_j} = \varphi_{(\pi_i \pi_j)}.$$

Benutzen Sie die Gruppentafel, wenn nötig.

- (b) [2] Überprüfen Sie Ihr Resultat, indem Sie die Summe aller Operatoren bilden:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \stackrel{!}{=} \varphi_{\pi_1} = I.$$

- (c) [4] Zeigen Sie folgende Projektionsoperatoreigenschaften (explizit):

$$P_2^2 = P_2, \quad P_2 P_3 = 0.$$

- (d) [8] Es sei  $X$  ein  $q$ -dimensionaler komplexer Hilbert-Raum ( $q \geq 1$ , tatsächlich interessieren wir uns nur für  $q \geq 2$ ) und  $Z = X \otimes X \otimes X$  das dreifache Tensorprodukt. Es sei

$$Z \ni z = t^{ijk} e_i \otimes e_j \otimes e_k$$

und

$$\varphi_\pi(z) = t^{\pi(ijk)} e_i \otimes e_j \otimes e_k$$

(siehe 5.5.3 der Vorlesung). Z. B. gilt für  $P_1$ :

$$\begin{aligned} P_1(t^{ijk} e_i \otimes e_j \otimes e_k) &= \frac{1}{6}(t^{ijk} - t^{jik} - t^{kji} - t^{ikj} + t^{jki} + t^{kij}) e_i \otimes e_j \otimes e_k \\ &=: t_1^{ijk} e_i \otimes e_j \otimes e_k. \end{aligned}$$

Welche Symmetrieeigenschaften besitzt

$$t_1^{ijk} := \frac{1}{6}(t^{ijk} - t^{jik} - t^{kji} - t^{ikj} + t^{jki} + t^{kij})$$

bzgl. Vertauschung zweier beliebiger Indizes? Untersuchen Sie nun analog die Wirkung von  $P_2, P_3$  und  $P_4$  und betrachten Sie die Symmetrieeigenschaften (soweit vorhanden).



## Übung 21

1. Gegeben sei die Lagrange-Funktion für 3 Quarks mit harmonischen Oszillatorpotentialen zwischen den einzelnen Quarks:

$$L = T - V = \frac{m}{2} [\dot{\vec{r}}^2(1) + \dot{\vec{r}}^2(2) + \dot{\vec{r}}^2(3)] - \frac{C}{2} \{ [\vec{r}(1) - \vec{r}(2)]^2 + [\vec{r}(1) - \vec{r}(3)]^2 + [\vec{r}(2) - \vec{r}(3)]^2 \},$$

wobei  $m = m_u = m_d = m_s$  für die Konstituentenquarkmasse steht. Wir führen die so genannten Jacobi-Koordinaten

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}(1) + \vec{r}(2) + \vec{r}(3)}{3}, \quad \vec{\rho} = \frac{\vec{r}(1) - \vec{r}(2)}{\sqrt{2}}, \quad \vec{\lambda} = \frac{\vec{r}(1) + \vec{r}(2) - 2\vec{r}(3)}{\sqrt{6}}$$

ein.

- (a) [3] Drücken Sie  $\vec{r}(1)$ ,  $\vec{r}(2)$  und  $\vec{r}(3)$  jeweils durch  $\vec{R}$ ,  $\vec{\rho}$  und  $\vec{\lambda}$  aus.  
 (b) [3] Drücken Sie nun die kinetische Energie  $T$  mit Hilfe von  $\vec{R}$ ,  $\vec{\rho}$  und  $\vec{\lambda}$  aus.  
 (c) [3] Drücken Sie das Potential  $V$  durch die Koordinaten  $\vec{R}$ ,  $\vec{\rho}$  und  $\vec{\lambda}$  aus.  
 (d) [1] Bestimmen Sie nun mit Hilfe von

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}}, \quad \vec{p}_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{\rho}}}, \quad \vec{p}_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{\lambda}}}$$

die kanonischen (oder konjugierten) Impulse.

- (e) [2] Bestimmen Sie nun mit Hilfe von  $H = p_i \dot{q}_i - L$  die Hamilton-Funktion in den Variablen  $\vec{P}$ ,  $\vec{p}_\rho$ ,  $\vec{p}_\lambda$ ,  $\vec{R}$ ,  $\vec{\rho}$  und  $\vec{\lambda}$ .  
 (f) [3] Betrachten Sie den Gesamtbahndrehimpuls

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^3 \vec{r}(i) \times \vec{p}(i).$$

Zeigen Sie, dass im Schwerpunktsystem ( $\vec{P} = 0$ )

$$\vec{L} = \vec{\rho} \times \vec{p}_\rho + \vec{\lambda} \times \vec{p}_\lambda =: \vec{l}_\rho + \vec{l}_\lambda$$

gilt.

2. Gegeben sei folgende Lagrange-Dichte zweier reeller skalarer Felder  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \Phi_1 \partial^\mu \Phi_1 + \partial_\mu \Phi_2 \partial^\mu \Phi_2 - m^2 (\Phi_1^2 + \Phi_2^2)] - \frac{\lambda}{4} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2$$

mit  $m^2 > 0$  und  $\lambda > 0$ . Führen Sie nun komplexe Felder ein:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_1 + i\Phi_2), \quad \Phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_1 - i\Phi_2).$$

- (a) [3] Drücken Sie  $\mathcal{L}$  durch die komplexen Felder  $\Phi$  und  $\Phi^\dagger$  aus, und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für  $\Phi$  und  $\Phi^\dagger$ .
- (b) [2] Betrachten Sie nun folgende infinitesimale lokale Transformation der Felder,

$$\Phi'(x) = [1 + i\epsilon(x)]\Phi(x), \quad \Phi'^\dagger = [1 - i\epsilon(x)]\Phi^\dagger(x),$$

und bestimmen Sie  $\delta\mathcal{L}$ ,  $J^\mu$  und  $\partial_\mu J^\mu$ .

3. Pentaquarks. Unter einem Pentaquark versteht man ein Baryon, das aus 4 Quarks und einem Antiquark besteht. Unter „exotischen“ Pentaquarks versteht man solche, bei denen das Antiquark einen anderen (Anti-) Flavor als die vier Quarks besitzt, z. B.  $uudd\bar{s}$ . Im Folgenden betrachten wir eine SU(3)-Flavor-Gruppe.

- (a) [2] Wiederholen Sie zunächst die Kopplung von drei Quarks in SU(3):

$$\square \otimes \square \otimes \square = ?$$

- (b) [4] Koppeln Sie nun das vierte Quark an das Resultat aus (a). Zur Kontrolle: Sie sollten als Dimensionalitäten bekommen:  $3^4 = 81 = 15 + 3 \cdot 15 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3$ .

- (c) [4] Koppeln Sie nun das Antiquark  $\overline{\square}$  an das Resultat aus (b). Zur Kontrolle: Sie sollten als Dimensionalitäten bekommen:  $3^5 = 243 = 35 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 27 + 8 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3$ .

## Übung 22

1. [4] Bei der Berechnung der Vertauschungsrelationen in Abschnitt 6.2 benötigen wir die Auflösung von Kommutatoren für Bosonen und Fermionen. Verifizieren Sie

$$\begin{aligned} [ab, cd] &= a[b, c]d + ac[b, d] + [a, c]db + c[a, d]b, \\ [ab, cd] &= a\{b, c\}d - ac\{b, d\} + \{a, c\}db - c\{a, d\}b. \end{aligned}$$

2. [4] Gegeben seien die Ladungsoperatoren

$$Q^a(t) = -i \int d^3x \Pi_i(x) t_{ij}^a \Phi_j(x)$$

aus Gl. (6.20) der Vorlesung. Verifizieren Sie mit Hilfe der kanonischen gleichzeitigen Vertauschungsrelationen (GZVR)

$$[Q^a(t), Q^b(t)] = -i(t_{ij}^a t_{jk}^b - t_{ij}^b t_{jk}^a) \int d^3x \Pi_i(t, \vec{x}) \Phi_k(t, \vec{x}).$$

3. Gegeben sei die skalare Feldtheorie aus Beispiel 6.2.8 der Vorlesung:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi_1\partial^\mu\Phi_1 + \partial_\mu\Phi_2\partial^\mu\Phi_2) - \frac{m^2}{2}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2 \\ &= \partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2\end{aligned}$$

mit

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi_1(x) + i\Phi_2(x)], \quad \Phi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi_1(x) - i\Phi_2(x)],$$

wobei  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  reelle skalare Felder sind. Für den erhaltenen Strom gilt

$$J^\mu = \Phi_1\partial^\mu\Phi_2 - \partial^\mu\Phi_1\Phi_2 = i\partial^\mu\Phi^\dagger\Phi - i\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi.$$

(a) [4] Verifizieren Sie mit Hilfe der kanonischen GZVR

$$\begin{aligned}[J^0(t, \vec{x}), \Phi_1(t, \vec{y})] &= i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\Phi_2(t, \vec{x}), \\ [J^0(t, \vec{x}), \Phi_2(t, \vec{y})] &= -i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\Phi_1(t, \vec{x})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}[J^0(t, \vec{x}), \Pi_1(t, \vec{y})] &= i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\Pi_2(t, \vec{x}), \\ [J^0(t, \vec{x}), \Pi_2(t, \vec{y})] &= -i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\Pi_1(t, \vec{x}).\end{aligned}$$

(b) [4] Verifizieren Sie

$$\begin{aligned}[J^0(t, \vec{x}), \Phi(t, \vec{y})] &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\Phi(t, \vec{x}), \\ [J^0(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] &= -\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\Pi(t, \vec{x}), \\ [J^0(t, \vec{x}), \Phi^\dagger(t, \vec{y})] &= -\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\Phi^\dagger(t, \vec{x}), \\ [J^0(t, \vec{x}), \Pi^\dagger(t, \vec{y})] &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\Pi^\dagger(t, \vec{x}).\end{aligned}$$

4. [4] Gegeben sei die Lagrange-Dichte der pseudoskalaren Pion-Nukleon-Wechselwirkung (siehe Beispiel 6.2.9 sowie Beispiele B.1.4 der Vorlesung):

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m_N)\Psi + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\vec{\Phi} \cdot \partial^\mu\vec{\Phi} - M_\pi^2\vec{\Phi}^2\right) - ig\bar{\Psi}\gamma_5\vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}\Psi$$

mit

$$\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie die infinitesimalen lokalen Transformationen

$$\begin{aligned}\Psi &\mapsto \Psi' = \left[1 - i\epsilon_a(x)\frac{\tau_a}{2}\right]\Psi, \\ \Phi_i &\mapsto \Phi'_i = \Phi_i - i\epsilon_a(x)\underbrace{(T_a^{\text{ad}})_{ij}}_{-i\epsilon_{aij}}\Phi_j = \Phi_i + \epsilon_{iaj}\epsilon_a(x)\Phi_j.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Änderung der Lagrange-Dichte  $\delta\mathcal{L}$ ,  $J^{\mu,a}$  und  $\partial_\mu J^{\mu,a}$ . Um welche Symmetriegruppe handelt es sich?

---

5. Wir nehmen an, dass der Hamilton-Operator der starken Wechselwirkung eine perfekte SU(3)-Flavor-Symmetrie besitzt.
- (a) [1] Betrachten Sie den (starken) Zerfall eines Baryonokuplettzustands in einen Baryonoktettzustand und einen Mesonoktettzustand. Wieviele unabhängige SU(3)-Amplituden benötigt man zur Beschreibung des Zerfalls?
- (b) [3] Wieviele unabhängige Amplituden sind zur Beschreibung der Streuung Baryonoktett + Mesonoktett nach Baryonokuplett + Mesonoktett nötig?

Hinweis: Schauen Sie sich noch einmal Übung 15, Aufgabe 1. (a) und Übung 16, Aufgabe 1. (a) sowie 5.5.14 der Vorlesung an.

## Übung 23

1. Gegeben sei die Lagrange-Dichte eines freien geladenen Teilchens (siehe Übung 22, Aufgabe 3.):

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi.$$

Unter einer lokalen U(1)-Transformation sollen die Felder  $\Phi$  und  $\Phi^\dagger$  laut

$$\Phi(x) \mapsto e^{i\alpha(x)} \Phi(x), \quad \Phi^\dagger(x) \mapsto e^{-i\alpha(x)} \Phi^\dagger(x)$$

transformieren.

- (a) [1] Wie lauten  $D_\mu \Phi$  und  $D_\mu \Phi^\dagger$ ?
- (b) [1] Konstruieren Sie mit Hilfe des Prinzips der Eichsymmetrie die zugehörige Eichtheorie.
- (c) [2] Schreiben Sie die resultierende Lagrange-Dichte aus und sortieren Sie die Terme nach Potenzen der Elementarladung? Was ist der wesentliche Unterschied zur QED-Lagrange-Dichte eines Elektrons?
- (d) [2] Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für  $\Phi$  und  $\Phi^\dagger$  her.
- (e) [2] Bestimmen Sie den elektromagnetischen Stromoperator mittels  $J_{\text{em}}^\mu = -\partial\mathcal{L}/\partial A_\mu$ .
- (f) [1] Vergleichen Sie mit dem Noether-Strom der globalen U(1)-Symmetrie. Worin besteht der Unterschied?

- (g) [2] Zeigen Sie mit Hilfe der Bewegungsgleichungen, dass der elektromagnetische Strom erhalten ist.
2. Es sei  $\{\sum_{a=1}^r \zeta_a T_a | \zeta_a \in \mathbb{R}\}$  die Darstellung einer Lie-Algebra in Form von hermiteschen  $(n, n)$ -Matrizen mit den Vertauschungsrelationen  $[T_a, T_b] = iC_{abc}T_c$  und  $\kappa \text{Tr}(T_a T_b) = \delta_{ab}$ . Wir definieren

$$\tilde{O} = \sum_{a=1}^r O_a T_a = O_a T_a.$$

- (a) [2] Zeigen Sie, dass das Transformationsverhalten

$$\widetilde{A}_\mu \rightarrow \widetilde{A}_\mu + i[\widetilde{A}_\mu, \tilde{\epsilon}] + \frac{1}{g} \partial_\mu \tilde{\epsilon}$$

für die einzelnen Eichfelder auf

$$\delta A_{\mu,a} = C_{bca} \epsilon_b A_{\mu,c} + \frac{1}{g} \partial_\mu \epsilon_a$$

führt.

- (b) [2] Wie transformiert  $\widetilde{\partial}_\mu \widetilde{A}_\nu - \widetilde{\partial}_\nu \widetilde{A}_\mu$  bzgl.  $\widetilde{A}_\mu \rightarrow \widetilde{A}_\mu + i[\widetilde{A}_\mu, \tilde{\epsilon}] + \frac{1}{g} \partial_\mu \tilde{\epsilon}$ ?
- (c) [3] Wir definieren

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \widetilde{A}_\nu - \partial_\nu \widetilde{A}_\mu + ig[\widetilde{A}_\mu, \widetilde{A}_\nu].$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Jacobi-Identität  $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$ , dass bis zur ersten Ordnung in  $\epsilon$

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} \rightarrow \widetilde{F}_{\mu\nu} + i[\widetilde{F}_{\mu\nu}, \tilde{\epsilon}]$$

für  $\widetilde{A}_\mu \rightarrow \widetilde{A}_\mu + i[\widetilde{A}_\mu, \tilde{\epsilon}] + \frac{1}{g} \partial_\mu \tilde{\epsilon}$ .

- (d) [2] Zeigen Sie damit, dass

$$-\frac{\kappa}{4} \text{Tr}(\widetilde{F}_{\mu\nu} \widetilde{F}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu,a} F_a^{\mu\nu}$$

bis zur ersten Ordnung in  $\epsilon$  invariant bzgl.  $\widetilde{F}_{\mu\nu} \rightarrow \widetilde{F}_{\mu\nu} + i[\widetilde{F}_{\mu\nu}, \tilde{\epsilon}]$  ist.

3. Gegeben sei eine (fiktive) Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & D_\mu \varphi^\dagger D^\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi + D_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi - M^2 \Phi^\dagger \Phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 \\ & + c_1 \Phi^\dagger \varphi \sigma + c_2 \varphi^\dagger \Phi \sigma - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

mit

$$D_\mu\varphi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi, \quad D_\mu\varphi^\dagger = (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^\dagger, \quad D_\mu\Phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\Phi, \quad D_\mu\Phi^\dagger = (\partial_\mu + ieA_\mu)\Phi^\dagger$$

d. h.  $\varphi$  und  $\Phi$  beschreiben unterschiedliche (einfach) negativ geladene Teilchen mit Massen  $m$  und  $M$ , und  $\sigma$  beschreibt ein neutrales Teilchen mit Masse  $m_\sigma$ .

- (a) [2] Zeigen Sie, dass  $\mathcal{L}$  invariant bzgl. einer Eichtransformation der zweiten Art ist:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\mapsto e^{i\alpha(x)}\varphi(x), \\ \Phi(x) &\mapsto e^{i\alpha(x)}\Phi(x), \\ \sigma(x) &\mapsto \sigma(x), \\ A_\mu(x) &\mapsto A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)/e. \end{aligned}$$

(Korrespondierende Transformationen von  $\varphi^\dagger$  und  $\Phi^\dagger$  impliziert.)

- (b) [1] Betrachten Sie den Wechselwirkungsterm

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = c_1\Phi^\dagger\varphi\sigma + c_2\varphi^\dagger\Phi\sigma, \quad c_i \in \mathbb{C}.$$

Welche Bedingungen für die Koeffizienten  $c_i$  ergeben sich aus der Forderung  $\mathcal{L}_{\text{int}} = \mathcal{L}_{\text{int}}^\dagger$ ?

- (c) [2] Untersuchen Sie das Verhalten der verschiedenen Terme der Lagrange-Dichte unter der Ladungskonjugationstransformation

$$\begin{aligned} A_\mu &\mapsto -A_\mu, \\ \varphi &\leftrightarrow \varphi^\dagger, \\ \Phi &\leftrightarrow \Phi^\dagger, \\ \sigma &\mapsto \sigma. \end{aligned}$$

Unter welcher Voraussetzung ist  $\mathcal{L}$  invariant bzgl. Ladungskonjugation?

4. [3] Zur Illustration des Eichprinzips diskutieren wir den ursprünglichen Vorschlag von Yang und Mills (Phys. Rev. **96**, 191 (1954)) die Isospinerhaltung aus einer *lokalen*  $SU(2)$ -Symmetrie herzuleiten. Gegeben sei

$$\mathcal{L}_0(\Psi, \partial_\mu\Psi) = \bar{\Psi}(i\partial - m_N)\Psi$$

mit einem Isospindublett

$$\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}.$$

Die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_0$  ist invariant bzgl. einer globalen infinitesimalen linearen Transformation der Felder

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = \left(1 - i \sum_{a=1}^3 \epsilon_a \frac{\tau_a}{2}\right) \Psi(x) = \left(1 - i \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{\tau}}{2}\right) \Psi(x).$$

Wie lautet die aus dem Eichprinzip abgeleitete Lagrange-Dichte? Verifizieren Sie den Ausdruck für die drei Feldstärken

$$F_{\mu\nu,a} = \partial_\mu A_{\nu,a} - \partial_\nu A_{\mu,a} - g\epsilon_{abc}A_{\mu,b}A_{\nu,c}$$

# Anhang A

## Zusammenstellung einiger mathematischer Grundbegriffe

**Definition eines Körpers.** Eine nichtleere Menge  $K$  heißt ein **Körper**, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Auf  $K$  ist eine Verknüpfung  $+$  je zweier Elemente erklärt, die folgende Eigenschaften hat:
  - (a) Abgeschlossenheit bzgl. Addition:  $\forall a, b \in K$  ist  $a + b \in K$ .
  - (b) Assoziativgesetz bzgl. Addition:  $\forall a, b, c \in K$  gilt  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .
  - (c) Neutrales Element bzgl. Addition:  $\exists 0 \in K$  mit  $0 + a = a \forall a \in K$ .
  - (d) Inverses Element:  $\forall a \in K \exists b \in K$  mit  $a + b = 0$ .
  - (e) Kommutativgesetz bzgl. Addition:  $a + b = b + a \forall a, b \in K$ .
2. Auf  $K$  ist eine weitere Verknüpfung (Multiplikation) erklärt, die folgende Eigenschaften besitzt:
  - (a) Abgeschlossenheit bzgl. Multiplikation:  $\forall a, b \in K$  ist  $ab \in K$ .
  - (b) Assoziativgesetz bzgl. Multiplikation:  $\forall a, b, c \in K$  gilt  $(ab)c = a(bc)$ .
  - (c) Einselement bzgl. Multiplikation:  $\exists 1 \in K$  mit  $1 \neq 0$  und  $1a = a \forall a \in K$ .
  - (d) Inverses Element zu  $a \neq 0$ :  $\forall a \in K/\{0\} \exists b \in K$  mit  $ba = 1$ .
  - (e) Kommutativgesetz bzgl. Multiplikation:  $ab = ba \forall a, b \in K$ .
3. Es gilt das Distributivgesetz

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc \quad \forall a, b, c \in K.$$



Standardbeispiele:  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ . Im Folgenden stehe  $\mathbb{K}$  für  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

**Definition einer Gruppe.** Unter einer (abstrakten) **Gruppe**  $G$  verstehen wir eine nichtleere Menge, in der jedem geordneten Paar  $(a, b) \in G \times G$  ein Element  $ab$  von  $G$  zugeordnet wird (Abgeschlossenheit), so dass gilt:

(G1)  $a(bc) = (ab)c \forall a, b, c \in G$  (Assoziativgesetz).

(G2) Es existiert ein Element  $e \in G$  mit  $ea = ae = a \forall a \in G$  (Einselement).

(G3) Zu jedem  $a \in G$  existiert ein  $a^{-1} \in G$  mit  $aa^{-1} = a^{-1}a = e$  (inverses Element).

Eine Gruppe  $G$  heißt genau dann **kommutativ** oder **abelsch**, wenn  $ab = ba \forall a, b \in G$ .

**Definition eines Vektorraums.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Eine Menge  $V$  heißt ein  **$\mathbb{K}$ -Vektorraum** ( $\mathbb{K}$ -VR) oder linearer Raum über  $\mathbb{K}$ , falls gilt:

1. Auf  $V$  ist eine Verknüpfung  $+$  (Vektoraddition) definiert, und  $V$  ist bzgl.  $+$  eine abelsche Gruppe. Wir bezeichnen das neutrale Element von  $V$  mit  $0$ .
2. Für jedes  $v \in V$  und jedes  $k \in \mathbb{K}$  ist genau ein Element  $kv \in V$  (Skalarmultiplikation) definiert. Dabei gilt:
  - (a) Ist  $1$  das Einselement von  $\mathbb{K}$ , so ist  $1v = v \forall v \in V$ .
  - (b)  $(k_1 + k_2)v = k_1v + k_2v$ ,  $(k_1k_2)v = k_1(k_2v) \forall k_1k_2 \in \mathbb{K}, v \in V$ .
  - (c)  $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2 \forall k \in \mathbb{K}, v_1, v_2 \in V$ .

**Definition einer Bilinearform.** Es seien  $X$  und  $Y$  lineare Räume über  $\mathbb{K}$ . Unter einer Bilinearform  $B$  verstehen wir eine Abbildung  $B : X \times X \rightarrow Y$  mit

$$\begin{aligned} B(k_1v_1 + k_2v_2, v_3) &= k_1B(v_1, v_3) + k_2B(v_2, v_3), \\ B(v_3, k_1v_1 + k_2v_2) &= k_1B(v_3, v_1) + k_2B(v_3, v_2) \end{aligned}$$

für alle  $v_1, v_2, v_3 \in X$  und  $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ , d. h.,  $B$  ist linear in jedem Argument.

**Definition einer Norm.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -VR. Eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  heißt eine **Norm** auf  $V$ , wenn gilt:

1.  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ,
2.  $\|kv\| = |k|\|v\| \forall v \in V, k \in \mathbb{K}$ ,
3.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \forall u, v \in V$  (Dreiecksungleichung).

$\|v\|$ : Norm von  $v$ .  $(V, \|\cdot\|)$ : Normierter Vektorraum.

### Definition einer Cauchy-Folge und eines Banach-Raums.

1. Eine Folge  $(v_n)_{n \geq n_0}$  in einem normierten Vektorraum  $(V, \|\cdot\|)$  heißt **Cauchy-Folge**, wenn gilt: Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $k_0 = k_0(\epsilon)$  mit  $\|v_m - v_n\| < \epsilon$  für  $m, n > k_0$ .
2. Der normierte Raum  $(V, \|\cdot\|)$  heißt **vollständig** oder ein **Banach-Raum**, wenn jede Cauchy-Folge in  $(V, \|\cdot\|)$  einen Grenzwert in  $V$  hat.

**Definition eines Skalarprodukts.** Sei  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$ . Sei  $V$  ein  $K$ -VR. Eine Abbildung  $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$  heißt ein **Skalarprodukt** oder **inneres Produkt** auf  $V$ , wenn gilt:

1.  $\langle v | v \rangle \geq 0 \forall v \in V, \quad \langle v | v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0,$
2.  $\langle u | v \rangle = \langle v | u \rangle^* \forall u, v \in V$ , insbesondere  $\langle u | u \rangle$  reell,
3.  $\langle u | \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u | v \rangle + \beta \langle u | w \rangle \forall u, v, w \in V, \alpha, \beta \in K.$

$\langle u | v \rangle$ : skalares Produkt von  $u$  mit  $v$ .  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ : Skalarproduktraum oder Prä-Hilbert-Raum.  $\langle u | v \rangle = 0 \Rightarrow u \perp v$ .

**Satz:** Sei  $U$  ein vollständiger Unterraum des Prä-Hilbert-Raums  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ . Dann läßt sich jedes  $x \in V$  eindeutig darstellen in der Form

$$x = y + z \quad \text{mit} \quad y \in U, z \in U^\perp.$$

Es gilt also  $V = U \oplus U^\perp$ .

Sei  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ein Skalarproduktraum. **Kanonische Norm:**  $\|u\| := \sqrt{\langle u | u \rangle}$ .

**Definition eines Hilbert-Raums.** Sei  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ein Skalarproduktraum und  $\|\cdot\|$  die kanonische Norm auf  $V$ . Ist  $(V, \|\cdot\|)$  vollständig, so heißt  $V$  ein **Hilbert-Raum**.

**Eigenschaften linearer Operatoren** (als Vorbereitung für die Lemmata von Schur). Sei  $L : V \rightarrow W$  ein linearer Operator:

- $\text{Kern}(L) = \{x | Lx = 0\}.$
- $\text{Bild}(L) = \{y | y \in W, y = Lx \text{ für } x \in V\} = W_L.$

1.  $L$  injektiv  $\Leftrightarrow \text{Kern}(L) = \{0\}.$
2.  $L$  surjektiv  $\Leftrightarrow \text{Bild}(L) = W.$
3.  $L$  invertierbar  $\Leftrightarrow \text{Kern}(L) = 0 \wedge \text{Bild}(L) = W.$
4.  $L$  invertierbar  $\Rightarrow \dim(W) = \dim(V).$

# Anhang B

## Lagrange-Formalismus für Felder und kanonische Quantisierung

### B.1 Lagrange-Formalismus für Felder

Voraussetzung: Kenntnis des Lagrange-Formalismus in der Punktmechanik.<sup>1</sup>

**Vorbemerkung B.1.1** Wir verwenden so genannte **natürliche Einheiten**:

$$\begin{aligned}\hbar &= c = 1, \\ \hbar c &= 197.3 \text{ MeV fm}, \\ c &= 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}, \\ 1 \text{ fm} &= 10^{-15} \text{ m}, \\ 1 \text{ b} &= 10^2 \text{ fm}^2, \\ \alpha &= \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}.\end{aligned}$$

Für kontinuierliche Systeme führen wir Felder als dynamische Variablen ein und betrachten sowohl die Zeit als auch die Ortskoordinaten,  $x = (x^\mu) = (t, \vec{x})$ , als Parameter.<sup>2</sup>

**B.1.2 Euler-Lagrange-Gleichung für ein skalares Feld.** Zunächst betrachten wir die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}$  eines skalaren Feldes,  $\Phi(x) = \Phi(t, \vec{x})$ ,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)], \quad (\text{B.1})$$

---

<sup>1</sup>Siehe z. B. L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Mechanik*, Kapitel I.2.

<sup>2</sup>Siehe z. B. H. Goldstein, *Klassische Mechanik*, Kapitel 11; F. Scheck, *Mechanik*, Kapitel 7.

$$\partial_\mu \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right),$$

wobei wir eine explizite Abhängigkeit der Lagrange-Dichte von  $x^\mu$  ausschließen wollen.<sup>3</sup> Die zugehörige Lagrange-Funktion  $L(t)$  lautet

$$L(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{L}[\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)]. \quad (\text{B.2})$$

Die klassische Bewegungsgleichung für  $\Phi(x)$  folgt aus dem Hamilton'schen Prinzip der kleinsten Wirkung für das so genannte Wirkungsfunktional

$$S[\Phi] = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{L}[\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)]}_{\int_R d^4x}. \quad (\text{B.3})$$

Wir definieren

$$\Phi_\epsilon(x) = \Phi(x) + \epsilon h(x) = \Phi(x) + \delta \Phi(x) \quad (\text{B.4})$$

mit  $h(x) = 0$  für  $x \in \partial R$ , dem Rand von  $R$ . Sei

$$F(\epsilon) = \int_R d^4x \mathcal{L}[\Phi(x) + \epsilon h(x), \partial_\mu \Phi(x) + \epsilon \partial_\mu h(x)], \quad (\text{B.5})$$

so dass  $F(0) = S[\Phi]$ . Wir entwickeln bis zum linearen Term in  $\epsilon$

$$F(\epsilon) = \int_R d^4x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) + \epsilon \int_R d^4x \left( h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} + \partial_\mu h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} \right) + O(\epsilon^2)$$

und verlangen nun

$$\delta S[\Phi] = F'(0) \stackrel{!}{=} 0. \quad (\text{B.6})$$

Damit erhalten wir

$$0 = \int_R d^4x \left( h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} + \partial_\mu h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} \right)$$

und machen beim zweiten Term von der Produktregel Gebrauch:

$$\partial_\mu h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} = \mathcal{D}_\mu \left( h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} \right) - h \mathcal{D}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi}.$$

Hierbei gilt

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \partial_\mu \Phi \frac{\partial}{\partial \Phi} + \partial_\mu \partial_\nu \Phi \frac{\partial}{\partial \partial_\nu \Phi}.$$

---

<sup>3</sup>Manche Autoren verwenden  $\Phi_\mu$  anstelle von  $\partial_\mu \Phi$ .

Als Zwischenrechnung betrachten wir

$$\begin{aligned}
\int_R d^4x \mathcal{D}_\mu \left( h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} \right) &= \int_{R^3} d^3x \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \right) \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d}{dx} \left( h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi}{\partial x}} \right) + \dots \\
&= \int_{R^3} d^3x \underbrace{\left[ h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \right]_{t_1}^{t_2}}_{0, \text{ da } h(t_1, \vec{x}) = h(t_2, \vec{x}) = 0} \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \underbrace{\left[ h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi}{\partial x}} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{0, \text{ da } h(t, \vec{x}) = 0 \text{ f\"ur } x \rightarrow \pm\infty} + \dots \\
&= 0.
\end{aligned}$$

---

Daraus folgt die Bedingung

$$0 = \int_R d^4x h(x) \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \mathcal{D}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} \right). \quad (\text{B.7})$$

- **Fundamentallemma der Variationsrechnung:**

Wenn das Integral  $\int_{x_1}^{x_2} h(x)g(x)dx$  gleich null ist für beliebige stetige Funktionen  $h(x)$  mit stetiger Ableitung und  $h(x_1) = h(x_2) = 0$ , dann gilt  $g(x) = 0$  in  $[x_1, x_2]$ .

Wir wenden nun das Fundamentallemma der Variationsrechnung auf Gl. (B.7) an und erhalten somit die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \mathcal{D}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} = 0, \quad (\text{B.8})$$

oder ausgeschrieben

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)} - \dots = 0.$$

- **Vorsicht:** Praktisch jedes Physikbuch schreibt in Gl. (B.8)  $\partial_\mu$  anstelle von  $\mathcal{D}_\mu$  mit dem Verständnis, daß bzgl. jeder  $x^\mu$ -Abhängigkeit im Sinne einer totalen Ableitung differenziert werden soll und nicht nur bzgl. der *expliziten*  $x^\mu$ -Abhängigkeit. Wir folgen von nun an dieser Konvention und schreiben  $\partial_\mu$  anstelle von  $\mathcal{D}_\mu$ .

**B.1.3 Euler-Lagrange-Gleichungen für mehrere Felder.** Hängt  $\mathcal{L}$  von  $n$  Feldern  $\Phi_i(x)$  ab, müssen wir eine unabhängige Variation bzgl.  $n$  Funktionen durchführen. Dazu definieren wir

$$\Phi_{i,\epsilon_i}(x) = \Phi_i(x) + \epsilon_i h_i(x) = \Phi_i + \delta \Phi_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{B.9})$$

und

$$F(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = S[\Phi_{i, \epsilon_i}]. \quad (\text{B.10})$$

Wir fordern wieder ein Extremum

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{B.11})$$

Dies führt auf  $n$  Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{B.12})$$

**Beispiele B.1.4** 1. Freies, reelles, skalares Feld  $\Phi$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^2) = \frac{1}{2}(g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - m^2 \Phi^2). \quad (\text{B.13})$$

Der metrische Tensor ermöglicht es, Indizes von „oben“ nach „unten“ zu erniedrigen (und umgekehrt)

$$g = (g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu},$$

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu = g_\mu^\nu a_\nu = g^\nu_\mu a_\nu = g_\nu^\mu a^\nu,$$

$$\frac{\partial \partial_\mu \Phi}{\partial \partial_\rho \Phi} = g_\mu^\rho = g^\rho_\mu.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} &= -m^2 \Phi, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \Phi} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_\mu^\rho \partial_\nu \Phi + \partial_\mu \Phi g_\nu^\rho) \\ &= \frac{1}{2} (g_\mu^\rho \partial^\mu \Phi + \partial^\nu \Phi g_\nu^\rho) \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\rho \Phi + \partial^\rho \Phi) = \partial^\rho \Phi = f^\rho(x, \Phi, \partial_\mu \Phi), \\ \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \Phi} &= \underbrace{\frac{\partial f^\rho}{\partial x^\rho}}_0 + \partial_\rho \Phi \underbrace{\frac{\partial f^\rho}{\partial \Phi}}_0 + \partial_\rho \partial_\sigma \Phi \underbrace{\frac{\partial f^\rho}{\partial \partial_\sigma \Phi}}_{\frac{\partial \partial^\rho \Phi}{\partial \partial_\sigma \Phi} = g^{\rho\sigma}} \\ &= \square \Phi. \end{aligned}$$

„Schnelle“ Rechnung:

$$\partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \Phi} = \partial_\rho \partial^\rho \Phi = \square \Phi.$$

Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\square + m^2)\Phi = 0. \quad (\text{B.14})$$

- Bemerkung: Beide Methoden liefern dasselbe Resultat.

Dazu betrachten wir folgende allgemeine Struktur

$$\Phi^m \partial_{\mu_1} \Phi \cdots \partial_{\mu_n} \Phi.$$

„Schnelle“ Methode unter Verwendung der Ketten- und Produktregeln:

$$\begin{aligned} & \partial_\mu (\Phi^m \partial_{\mu_1} \Phi \cdots \partial_{\mu_n} \Phi) \\ &= m \Phi^{m-1} \partial_\mu \Phi \partial_{\mu_1} \Phi \cdots \partial_{\mu_n} \Phi \\ & \quad + \underbrace{\Phi^m (\partial_\mu \partial_{\mu_1} \Phi \cdots \partial_{\mu_n} \Phi + \cdots + \partial_{\mu_1} \Phi \cdots \partial_\mu \partial_{\mu_n} \Phi)}_{n \text{ Summanden}}. \end{aligned}$$

„Ausführliche“ Methode:

$$\begin{aligned} & (\partial_\mu \phi \frac{\partial}{\partial \Phi} + \partial_\mu \partial_\nu \Phi \frac{\partial}{\partial \partial_\nu \Phi}) (\Phi^m \partial_{\mu_1} \Phi \cdots \partial_{\mu_n} \Phi) \\ &= m \Phi^{m-1} \partial_\mu \Phi \partial_{\mu_1} \Phi \cdots \partial_{\mu_n} \Phi \\ & \quad + \underbrace{\Phi^m \partial_\mu \partial_\nu \Phi (g_{\mu_1}^\nu \cdots \partial_{\mu_n} \Phi + \cdots + \partial_{\mu_1} \Phi \cdots g_{\mu_n}^\nu)}_{\Phi^m (\partial_\mu \partial_{\mu_1} \Phi \cdots \partial_{\mu_n} \Phi + \cdots + \partial_{\mu_1} \Phi \cdots \partial_\mu \partial_{\mu_n} \Phi)}. \end{aligned}$$

Die Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung lassen sich folgendermaßen darstellen

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})} \left[ a(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + a^*(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \right]$$

mit

$$k \cdot x = k_0 x_0 - \vec{k} \cdot \vec{x}, \quad k_0 = \omega(\vec{k}) = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}.$$

2. Zwei reelle skalare Felder  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  gleicher Masse  $m$  mit einer so genannten  $\lambda\Phi^4$ -Wechselwirkung<sup>4</sup>:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \Phi_1 \partial^\mu \Phi_1 + \partial_\mu \Phi_2 \partial^\mu \Phi_2 - m^2 (\Phi_1^2 + \Phi_2^2)] - \frac{\lambda}{4} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2 \quad (\text{B.15})$$

mit  $m^2 > 0$  und  $\lambda > 0$ .

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i} = -m^2 \Phi_i - \lambda \Phi_i (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) - \square \Phi_i = 0.$$

$$(\square + m^2)\Phi_i = -\lambda \Phi_i (\Phi_1^2 + \Phi_2^2), \quad i = 1, 2, \quad (\text{B.16})$$

d. h. wir erhalten zwei gekoppelte partielle Differentialgleichungen.

---

<sup>4</sup>Modelle dieser Art werden gerne zur Illustration einfachster (Quanten-) Feldtheorien benutzt.

3. Freies Dirac-Feld  $\Psi$  der Masse  $m$ :

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi. \quad (\text{B.17})$$

Zur Erinnerung:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix},$$

wobei die  $\Psi_i$  stetig differenzierbare, komplexwertige Funktionen sind.

Wir machen von der so genannten Standarddarstellung der Gamma-Matrizen Gebrauch:

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -1_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix},$$

$\sigma_i$ : Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.18})$$

Notation

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0 = (\Psi_1^* \ \Psi_2^* \ -\Psi_3^* \ -\Psi_4^*).$$

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi} = -m \bar{\Psi} - \partial_\mu \bar{\Psi} i \gamma^\mu = 0.$$

Wir adjungieren diese Gleichung, wobei wir  $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$  benutzen, und multiplizieren mit  $\gamma^0$ .  $\Rightarrow$  Dirac-Gleichung:

$$\gamma^0 (-m \gamma^0 \Psi + i \gamma^0 \gamma^\mu \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_1 \partial_\mu \Psi) = (i \not{\partial} - m) \Psi = 0 \quad (\text{B.19})$$

mit der Abkürzung  $\not{\partial} = a_\mu \gamma^\mu$ .

Die Lösungen der Dirac-Gleichung sind von der Form

$$\begin{aligned} u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}, \quad r = 1, 2, \quad (\text{„Lösungen zu positiver Energie“}) \\ v^{(r)}(\vec{p}) e^{ip \cdot x}, \quad r = 1, 2, \quad (\text{„Lösungen zu negativer Energie“}) \end{aligned}$$

wobei  $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$  und  $p_0 = E(\vec{p}) = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ .



Eigenschaften der Dirac-Spinoren:

$$\begin{aligned}
(\not{p} - m)u^{(r)}(\vec{p}) &= 0, \\
(\not{p} + m)v^{(r)}(\vec{p}) &= 0, \\
\bar{u}^{(r)}(\vec{p})(\not{p} - m) &= 0, \\
\bar{v}^{(r)}(\vec{p})(\not{p} + m) &= 0, \\
\bar{u}^{(r)}(\vec{p})u^{(s)}(\vec{p}) &= -\bar{v}^{(r)}(\vec{p})v^{(s)}(\vec{p}) = 2m\delta_{rs}, \\
u^{(r)\dagger}(\vec{p})u^{(s)}(\vec{p}) &= v^{(r)\dagger}(\vec{p})v^{(s)}(\vec{p}) = 2E(\vec{p})\delta_{rs}, \\
u^{(r)\dagger}(\vec{p})v^{(s)}(-\vec{p}) &= 0, \\
\sum_{r=1}^2 u_{\alpha}^{(r)}(\vec{p})\bar{u}_{\beta}^{(r)}(\vec{p}) &= (\not{p} + m)_{\alpha\beta}, \\
\sum_{r=1}^2 v_{\alpha}^{(r)}(\vec{p})\bar{v}_{\beta}^{(r)}(\vec{p}) &= (\not{p} - m)_{\alpha\beta}, \\
\sum_{r=1}^2 [u_{\alpha}^{(r)}(\vec{p})\bar{u}_{\beta}^{(r)}(\vec{p}) - v_{\alpha}^{(r)}(\vec{p})\bar{v}_{\beta}^{(r)}(\vec{p})] &= 2m\delta_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Explizite Darstellungen lauten

$$\begin{aligned}
u^{(r)}(\vec{p}) &= \sqrt{E(\vec{p}) + m} \begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E(\vec{p}) + m} \chi_r \end{pmatrix}, \\
v^{(r)}(\vec{p}) &= \sqrt{E(\vec{p}) + m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E(\vec{p}) + m} \chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

mit

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

#### 4. Pseudoskalare Pion-Nukleon-Wechselwirkung:

Wir definieren ein Isospindublett

$$\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

( $p$  und  $n$  sind jeweils vierkomponentige Dirac-Felder) und ein Isospintriplett reeller pseudoskalarer Felder

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix}.$$

(Der Begriff „pseudoskalar“ bezieht sich auf die Forderung, dass die Felder  $\Phi_i(t, \vec{x})$  unter einer Paritätstransformation auf  $-\Phi_i(t, -\vec{x})$  abgebildet werden.) Anstelle der kartesischen Komponenten  $\Phi_i$  verwendet man häufig Felder, die den physikalischen (geladenen) Zuständen

entsprechen (Vorsicht, hier keine sphärische Konvention):

$$\pi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 - i\Phi_2), \quad \pi^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 + i\Phi_2), \quad \pi^0 = \Phi_3. \quad (\text{B.20})$$

Mit Hilfe der Pauli-Matrizen (für den Isospinraum)

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.21})$$

finden wir

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\Phi} = \tau_i \Phi_i = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass  $(\vec{\tau} \cdot \vec{\Phi})^\dagger = \vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}$ , d. h.  $\vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}$  hermitesch ist. Dies folgt aus der Hermitizität der  $\tau_i$  und der Tatsache, dass die  $\Phi_i$  reelle Felder sind. Außerdem ist  $\text{Tr}(\vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}) = 0$  wegen  $\text{Tr}(\tau_i) = 0$ . Wir definieren  $a \overleftrightarrow{\partial}_\mu b := a\partial_\mu b - (\partial_\mu a)b$  und betrachten die Lagrange-Dichte der so genannten pseudoskalaren Pion-Nukleon-Wechselwirkung

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} \left( \frac{i}{2} \overleftrightarrow{\not{\partial}} - m_N \right) \Psi + \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \vec{\Phi} \cdot \partial^\mu \vec{\Phi} - M_\pi^2 \vec{\Phi}^2 \right) - ig \bar{\Psi} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\Phi} \Psi, \quad (\text{B.22})$$

wobei

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & 1_{2 \times 2} \\ 1_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0.$$

Parameter:

$$\begin{aligned} m_N &= m_p = m_n, & m_p &= 938.3 \text{ MeV}, & m_n &= 939.6 \text{ MeV}, \\ M_\pi &= M_{\pi^\pm} = M_{\pi^0}, & M_{\pi^\pm} &= 139.6 \text{ MeV}, & M_{\pi^0} &= 135.0 \text{ MeV}, \\ g &= g_{\pi N}, & g_{\pi N} &= 13.2. \end{aligned}$$

Anmerkung: Gl. (B.22) stellt eine sehr kompakte Schreibweise für folgenden Sachverhalt dar.

Die Komponenten des Nukleonfeldes  $\Psi$  werden durch zwei Indizes charakterisiert:

$$\Psi_{f,\alpha}$$

$f = 1, 2$ : Isospinindex ( $p, n$ ),

$\alpha = 1, 2, 3, 4$ : Bispinor- oder Dirac-Index.

Damit steht Gl. (B.22) für

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{2} \sum_{f',f=1}^2 \sum_{\alpha',\alpha=1}^4 i(\bar{\Psi}_{f',\alpha'} \gamma^\mu_{\alpha'\alpha} 1_{f'f} \partial_\mu \Psi_{f,\alpha} - \partial_\mu \bar{\Psi}_{f',\alpha'} \gamma^\mu_{\alpha'\alpha} 1_{f'f} \Psi_{f,\alpha}) \\
& - m_N \sum_{f',f=1}^2 \sum_{\alpha',\alpha=1}^4 \bar{\Psi}_{f',\alpha'} 1_{\alpha'\alpha} 1_{f'f} \Psi_{f,\alpha} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\partial_\mu \Phi_i \partial^\mu \Phi_i - M_\pi^2 \Phi_i^2) \\
& - ig \sum_{f',f=1}^2 \sum_{\alpha',\alpha=1}^4 \sum_{i=1}^3 \bar{\Psi}_{f',\alpha'} \gamma_5 \alpha'_{\alpha} \tau_{if'f} \Psi_{f,\alpha} \Phi_i.
\end{aligned}$$

Anmerkung:

- Einheitsmatrizen (im Isospin- und Dirac-Raum) werden grundsätzlich weggelassen.
- Matrizen, die in verschiedenen Räumen operieren, kommutieren miteinander. Beispiel:  $\tau_i \gamma_5 = \gamma_5 \tau_i$ .

Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\Psi}} &= \frac{i}{2} \not{\partial} \Psi - m_N \Psi - ig \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\Phi} \Psi - \partial_\mu \left( -\frac{i}{2} \gamma^\mu \Psi \right) = 0, \\
\Rightarrow (i\not{\partial} - m_N) \Psi &= ig \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\Phi} \Psi, \tag{B.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\Phi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \vec{\Phi}} &= -M_\pi^2 \vec{\Phi} - ig \bar{\Psi} \gamma_5 \vec{\tau} \Psi - \square \vec{\Phi} = 0, \\
\Rightarrow (\square + M_\pi^2) \vec{\Phi} &= -ig \bar{\Psi} \gamma_5 \vec{\tau} \Psi. \tag{B.24}
\end{aligned}$$

- Bemerkungen:

- Wir haben es mit einem Satz gekoppelter partieller Differentialgleichungen zu tun.
- Die Lagrange-Dichten für wechselwirkende Systeme sind von der Form

$$\mathcal{L} = \sum_i \mathcal{L}_{i,\text{frei}} + \mathcal{L}_{\text{int}}.$$

Entsprechend erhält man Bewegungsgleichungen vom Typ

frei		mit Wechselwirkung
$(\square + m_\pi^2) \Phi_i = 0$	$\rightarrow$	$(\square + M_\pi^2) \Phi_i = \text{„Quellterm“}$
$(i\not{\partial} - m_N) \Psi = 0$	$\rightarrow$	$(i\not{\partial} - m_N) \Psi = \text{„Quellterm“}$

Vergleiche die Analogie zur Elektrostatik:

$$\Delta \phi = -\rho.$$

5. Dasselbe wie 2. oben, nur mit komplexen Feldern:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_1 + i\Phi_2), \quad \Phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_1 - i\Phi_2).$$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^\dagger - m^2 \Phi \Phi^\dagger - \lambda (\Phi \Phi^\dagger)^2. \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} = -m^2 \Phi^\dagger - 2\lambda \Phi \Phi^\dagger \Phi^\dagger - \square \Phi^\dagger = 0.$$

$$(\square + m^2) \Phi^\dagger = -2\lambda \Phi \Phi^\dagger \Phi^\dagger,$$

und vollkommen analog

$$(\square + m^2) \Phi = -2\lambda \Phi \Phi^\dagger \Phi.$$

Die beiden Gleichungen sind äquivalent zu Gl. (B.16).

6. Lagrange-Dichte für die Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit einer vorgegebenen äußeren Stromdichte  $J^\mu$  (natürliche Einheiten)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu, \quad (\text{B.26})$$

wobei

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.27})$$

Symbolisch

$$(T^{\mu\nu}) = \left( \begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array} \right), \quad (T^\mu{}_\nu) = (T^{\mu\rho} g_{\rho\nu}) = \left( \begin{array}{c|c} a & -b \\ \hline c & -d \end{array} \right),$$

$$(T_\mu{}^\nu) = \left( \begin{array}{c|c} a & b \\ \hline -c & -d \end{array} \right), \quad (T_{\mu\nu}) = \left( \begin{array}{c|c} a & -b \\ \hline -c & d \end{array} \right)$$

und damit

$$(F_{\mu\nu}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & E_x & E_y & E_z \\ \hline -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{array} \right).$$

In Worten:  $F_{\mu\nu}$  folgt aus  $F^{\mu\nu}$  durch die Ersetzung  $\vec{E} \rightarrow -\vec{E}$  und  $\vec{B} \rightarrow \vec{B}$ .

Zur Erinnerung:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\Phi, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (\text{B.28})$$

Mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial \partial_\sigma A_\rho} &= \frac{\partial}{\partial \partial_\sigma A_\rho} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = g_\mu^\sigma g_\nu^\rho - g_\nu^\sigma g_\mu^\rho, \\ \frac{\partial}{\partial \partial_\sigma A_\rho} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) &= 2(g_\mu^\sigma g_\nu^\rho - g_\nu^\sigma g_\mu^\rho) F^{\mu\nu} = 4F^{\sigma\rho} \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\sigma A_\rho} = -J^\rho + \partial_\sigma F^{\sigma\rho} = 0$$

und damit die kovariante Form der inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\sigma F^{\sigma\rho} = J^\rho. \quad (\text{B.29})$$

Dies entspricht

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}. \quad (\text{B.30})$$

- Wo sind die homogenen Gleichungen?

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (\text{B.31})$$

Diese sind aufgrund von Gl. (B.28) automatisch erfüllt. Wenn wir den dualen Tensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (\text{B.32})$$

eingeführen, wobei

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{für } \{\mu, \nu, \rho, \sigma\} \text{ eine gerade Permutation von } \{0, 1, 2, 3\} \\ -1 & \text{für } \{\mu, \nu, \rho, \sigma\} \text{ eine ungerade Permutation von } \{0, 1, 2, 3\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

der total antisymmetrische Levi-Civita-Tensor ist, dann gilt

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.33})$$

d.h., man erhält  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  aus  $F^{\mu\nu}$ , indem man  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$  und  $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$  setzt (z. B.  $\tilde{F}^{01} = -\frac{1}{2}((-1)F_{23} + F_{32}) = F_{23} = -B_x$ ). Die homogenen Gleichungen sind automatisch erfüllt, denn

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = 0,$$

da  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  antisymmetrisch bzgl.  $\mu \leftrightarrow \rho$  ist und  $\partial_\mu \partial_\rho A_\sigma$  symmetrisch.

7. Freies Spin-1-Feld der Masse  $m$ :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu, \quad (\text{B.34})$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2V_\mu V^\mu. \quad (\text{B.35})$$

Beachte insbesondere das Vorzeichen des Massenterms.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V_\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\sigma V_\rho} = m^2V^\rho + \partial_\sigma F^{\sigma\rho} = 0. \quad (\text{B.36})$$

Gl. (B.34) und (B.36) werden als Proca-Gleichungen<sup>5</sup> bezeichnet.

Wir bilden  $\partial_\rho$  von Gl. (B.36) und erhalten wegen der Antisymmetrie von  $F^{\sigma\rho}$  bzgl.  $\sigma \leftrightarrow \rho$

$$m^2\partial_\rho V^\rho = 0,$$

so dass wir für  $m^2 \neq 0$  noch die zusätzliche Bedingung

$$\partial_\rho V^\rho = 0 \quad (\text{B.37})$$

bekommen. Diese setzen wir in die Bewegungsgleichung, Gl. (B.36), ein,

$$m^2V^\rho + \partial_\sigma F^{\sigma\rho} = m^2V^\rho + \partial_\sigma \partial^\sigma V^\rho - \underbrace{\partial_\sigma \partial^\rho V^\sigma}_{\partial^\rho \partial_\sigma V^\sigma} = 0$$

und erhalten schließlich

$$(\square + m^2)V^\rho = 0, \quad (\text{B.38})$$

$$\partial_\rho V^\rho = 0. \quad (\text{B.39})$$

Die zweite Gleichung liefert eine Bedingung zwischen den vier Komponenten von  $V^\rho$ , so dass wir es mit 3 unabhängigen Freiheitsgraden zu tun haben (Spin-1-Objekt). Die Lösungen der Proca-Gleichungen lassen sich in ebene Wellen zerlegen

$$V^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})} \sum_{r=1}^3 \epsilon_r^\mu(\vec{k}) a_r(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + H.c.,$$

mit  $k_0 = \omega(\vec{k}) = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$ . Die (reellen) Polarisationsvektoren  $\epsilon_r(\vec{k})$  erfüllen für jedes  $\vec{k}$

$$\epsilon_r(\vec{k}) \cdot \epsilon_s(\vec{k}) = -\delta_{rs}.$$

Außerdem folgt aus  $\partial_\mu V^\mu(x) = 0$

$$k_\mu \epsilon_r^\mu(\vec{k}) = 0.$$

---

<sup>5</sup>Manche Bücher bezeichnen nur Gl. (B.36) als *die* Proca-Gleichung.

Beispiel:

$$\begin{aligned}k &= (\omega(\vec{k}), 0, 0, |\vec{k}|), \\ \epsilon_1(\vec{k}) &= (0, 1, 0, 0), \\ \epsilon_2(\vec{k}) &= (0, 0, 1, 0), \\ \epsilon_3(\vec{k}) &= (|\vec{k}|, 0, 0, \omega(\vec{k}))/m.\end{aligned}$$

„Vollständigkeitsrelation“ (für beliebiges  $\vec{k}$ )

$$\sum_{r=1}^3 \epsilon_r^\mu(\vec{k}) \epsilon_r^\nu(\vec{k}) = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{m^2}.$$

## B.2 Kanonische Quantisierung des skalaren Feldes

Literatur:

- J. D. Bjorken und S. D. Drell, *Relativistische Quantenfeldtheorie*, BI, Mannheim 1967, Kapitel 12
- C. Itzykson und J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York 1980, Kapitel 3-1
- L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge 1985, Kapitel 4.1

Bisher haben wir das freie, skalare Feld als klassisches System betrachtet, obwohl es genau genommen kein klassisches Analogon zum Klein-Gordon-Feld gibt. Eine quantenmechanische Interpretation der Klein-Gordon-Gleichung als relativistische Einteilchengleichung scheitert an zwei Eigenschaften:

1. Sie erlaubt Lösungen „negativer Energie“, wenn man  $i\partial^\mu$  als Energie- und Impulsoperator interpretiert. Im Fall der Dirac-Gleichung lässt sich dieses Problem mit einem gefüllten See negativer Energie-Lösungen umgehen.
2. Es ist nicht möglich, eine Viererstromdichte mit positiv definiter Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho$  anzugeben.

Beide Probleme treten im Rahmen der Quantenfeldtheorie nicht mehr auf. In Analogie zur Punktmechanik definieren wir zunächst den zum Feld  $\Phi(t, \vec{x})$  konjugierten Impuls

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad \rightarrow \quad \Pi(t, \vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \quad (\text{B.40})$$

und die Hamilton-Dichte

$$H = p\dot{q} - L \quad \rightarrow \quad \mathcal{H} = \Pi\dot{\Phi} - \mathcal{L}. \quad (\text{B.41})$$

Die Hamilton-Funktion ergibt sich dann als Integral

$$H(t) = \int d^3x \mathcal{H}. \quad (\text{B.42})$$

Wir finden ganz konkret für das freie, skalare Feld (siehe Gl. (B.13))

$$\begin{aligned} \Pi &= \dot{\Phi}, \\ \mathcal{H} &= \dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2} \left( \dot{\Phi}\dot{\Phi} - \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\Phi - m^2\Phi^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \Pi^2 + \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\Phi + m^2\Phi^2 \right), \\ H(t) &= \frac{1}{2} \int d^3x \left( \Pi^2 + \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\Phi + m^2\Phi^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$



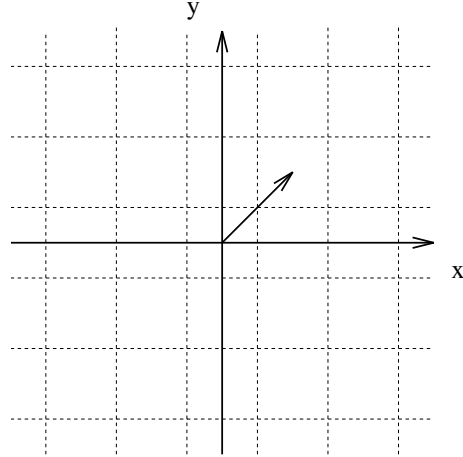


Abbildung B.1: Zweidimensionale Darstellung der Zellen.

Beachte insbesondere, dass  $H(t) \geq 0$  ist (der Integrand ist als Summe von Quadraten reeller Größen immer nichtnegativ), d. h. in der klassischen Feldtheorie das Problem negativer Energie gar nicht auftritt.

Wir betrachten im Folgenden  $\Phi(t, \vec{x})$  als einen hermiteschen Operator (in Analogie zum Übergang von der klassischen Punktmechanik zur QM). In welchem Hilbert-Raum dieser Operator wirkt, bleibt noch zu klären. Dieser Operator soll in der Quantenfeldtheorie eine ähnliche Rolle spielen wie der Ortsoperator im Heisenberg-Bild,  $q_H(t)$ , in der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Insbesondere fassen wir  $\vec{x}$  als eine Art „Parameter“ auf, so dass wir unendlich viele Freiheitsgrade haben, nämlich für jedes  $\vec{x}$  ein  $\Phi(t, \vec{x})$ .

Wir unterteilen den dreidimensionalen Raum in Zellen mit Volumen  $\delta V$ . Jede Zelle werde durch ein Tripel  $\vec{r}$  von ganzen Zahlen gekennzeichnet (siehe Abbildung B.1): Es sei  $\Phi_{\vec{r}}(t)$  der Mittelwert von  $\Phi(t, \vec{x})$  in der durch  $\vec{r}$  bezeichneten Zelle und  $\mathcal{L}_{\vec{r}}$  der Mittelwert der entsprechenden Lagrange-Dichte. Die Lagrange-Funktion lautet also

$$L(t) = \sum_{\vec{r}} L_{\vec{r}}(t) = \sum_{\vec{r}} \delta V \mathcal{L}_{\vec{r}} \stackrel{\delta V \rightarrow 0}{\rightarrow} \int d^3x \mathcal{L}. \quad (\text{B.44})$$

Wir definieren den zu  $\Phi_{\vec{r}}(t)$  konjugierten Impuls  $p_{\vec{r}}(t)$  in Analogie zur Punktmechanik als

$$p_{\vec{r}}(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_{\vec{r}}(t)} = \frac{\delta V \partial \mathcal{L}_{\vec{r}}}{\partial \dot{\Phi}_{\vec{r}}(t)} =: \delta V \Pi_{\vec{r}}(t), \quad (\text{B.45})$$

wobei im Kontinuumgrenzfall Gl. (B.40) gilt. Wir betrachten nun  $\Phi_{\vec{r}}(t)$  und  $p_{\vec{r}}(t)$  als Operatoren im Heisenberg-Bild und fordern in Analogie zur nichtre-

lativistischen Quantenmechanik die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [q_i(t), p_j(t)] &= i\delta_{ij} & \rightarrow & \quad [\Phi_{\vec{r}}(t), p_{\vec{s}}(t)] = i\delta_{\vec{r}\vec{s}}, \\ [q_i(t), q_j(t)] &= 0 & \rightarrow & \quad [\Phi_{\vec{r}}(t), \Phi_{\vec{s}}(t)] = 0, \\ [p_i(t), p_j(t)] &= 0 & \rightarrow & \quad [p_{\vec{r}}(t), p_{\vec{s}}(t)] = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

Wir betrachten nun den Grenzfall  $\delta V \rightarrow 0$ , machen von Gl. (B.45) Gebrauch und erhalten somit die kanonischen, gleichzeitigen Vertauschungsrelationen (GZVR) der Operatoren  $\Phi$  und  $\Pi$ :

$$\begin{aligned} [\Phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] &= i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ [\Phi(t, \vec{x}), \Phi(t, \vec{y})] = [\Pi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Der oben beschriebene Vorgang wird als kanonische Quantisierung eines skalaren Feldes bezeichnet. Der Operator  $\Phi(x)$  soll also einerseits der aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung hergeleiteten Bewegungsgleichung

$$(\square + m^2)\Phi(x) = 0 \quad (\text{B.48})$$

gehoren und andererseits zusammen mit  $\Pi(x)$  die GZVR, Gl. (B.47), erfüllen. Dazu betrachten wir die Fourier-Zerlegung

$$\Phi(t, \vec{x}) = \int \underbrace{\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})}}_{d^3k} [a(\vec{k})e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(\vec{k})e^{ik \cdot x}] = \Phi^\dagger(t, \vec{x}), \quad (\text{B.49})$$

mit  $k_0 = \omega(\vec{k}) = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$ . In Übung 3 wird gezeigt, dass die GZVR folgende Vertauschungsrelationen für die Operatoren  $a(\vec{k})$  und  $a^\dagger(\vec{k})$  implizieren:

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2\omega(\vec{k}) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 0. \quad (\text{B.50})$$

- Nun zur Interpretation der  $a(\vec{k})$  und  $a^\dagger(\vec{k})$ :

Es sei  $|E\rangle$  ein Eigenzustand zum Hamilton-Operator  $H$ , der sich laut Übung 3 folgendermaßen ausdrücken lässt:

$$H = \frac{1}{2} \int \widetilde{d^3k} \omega(\vec{k}) \left( a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) \right). \quad (\text{B.51})$$

Wir betrachten

$$Ha(\vec{k})|E\rangle = \left( a(\vec{k})H + [H, a(\vec{k})] \right) |E\rangle,$$

machen Gebrauch von

$$\begin{aligned}
[H, a(\vec{k})] &= \frac{1}{2} \int \widetilde{d^3k'} \omega(\vec{k}') [a^\dagger(\vec{k}')a(\vec{k}') + a(\vec{k}')a^\dagger(\vec{k}'), a(\vec{k})] \\
&= \frac{1}{2} \int \widetilde{d^3k'} \omega(\vec{k}') \left( a^\dagger(\vec{k}') \underbrace{[a(\vec{k}'), a(\vec{k})]}_0 + \underbrace{[a^\dagger(\vec{k}'), a(\vec{k})]}_{-(2\pi)^3 2\omega(\vec{k}) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')} a(\vec{k}') \right. \\
&\quad \left. + a(\vec{k}') \underbrace{[a^\dagger(\vec{k}'), a(\vec{k})]}_{\text{s.o.}} + \underbrace{[a(\vec{k}'), a(\vec{k})]}_0 a^\dagger(\vec{k}') \right) \\
&= -\omega(\vec{k})a(\vec{k})
\end{aligned}$$

und erhalten

$$= [E - \omega(\vec{k})] a(\vec{k})|E\rangle, \quad (\text{B.52})$$

und vollkommen analog

$$H a^\dagger(\vec{k})|E\rangle = [E + \omega(\vec{k})] a^\dagger(\vec{k})|E\rangle. \quad (\text{B.53})$$

Ebenso erhält man für den Impulsoperator

$$\vec{P} = \int \widetilde{d^3k} \vec{k} a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}). \quad (\text{B.54})$$

Die Schritte zwischen Gl. (B.51) - (B.53) lassen sich vollkommen analog für den Impulsoperator durchführen.

- Fazit: Die Operatoren  $a^\dagger(\vec{k})$  und  $a(\vec{k})$  erzeugen bzw. vernichten ein Quant mit Energie  $\omega(\vec{k})$  und Impuls  $\vec{k}$ .
- Anmerkung zur Normalordnung:

Es sei  $|0\rangle$  der Grundzustand (Vakuum) des Systems mit

$$a(\vec{k})|0\rangle = 0, \quad \langle 0|a^\dagger(\vec{k}) = 0 \quad \forall \vec{k}. \quad (\text{B.55})$$

Wir betrachten den Vakuumerwartungswert (VEW) des Hamilton-Operators aus Gl. (B.51):

$$\begin{aligned}
\langle 0|H|0\rangle &= \frac{1}{2} \int \widetilde{d^3k} \omega(\vec{k}) \langle 0| \left( a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) \right) |0\rangle \\
&= \frac{1}{2} \int \widetilde{d^3k} \omega(\vec{k}) \langle 0| \left( 2a^\dagger(\vec{k}) \underbrace{a(\vec{k})}_{a(\vec{k})|0\rangle = 0} + [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k})] \right) |0\rangle \\
&= \infty, \quad (\text{B.56})
\end{aligned}$$

da  $[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k})] \sim \delta^3(0)$  und außerdem noch über alle  $\vec{k}$  integriert wird. Der Hamilton-Operator liefert also eine unendliche Konstante, die sich als Summe über Oszillatormultipunktenergien interpretieren lässt. Eine Redefinition

des Hamilton-Operators wird dergestalt vorgenommen, dass der Grundzustand auf die Energie  $E_0 = 0$  normiert ist:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \int \widetilde{d^3k} \omega(\vec{k}) \left[ a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) \right. \\
&\quad \left. - \langle 0 | \left( a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) \right) | 0 \rangle \right] \\
&= \frac{1}{2} \int \widetilde{d^3k} \omega(\vec{k}) : a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) : \\
&= \int \widetilde{d^3k} \omega(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}). \tag{B.57}
\end{aligned}$$

Hierbei ist  $:$  das Symbol für die Normalordnung, d. h. Vernichtungsoperatoren stehen immer rechts von Erzeugungsoperatoren. Für Bosonen vertauschen Operatoren, die von zwei Normalordnungszeichen eingeschlossen sind.

- Beispiel:

$$: a(\vec{k})a^\dagger(\vec{q})a^\dagger(\vec{p})a(\vec{r}) : \stackrel{z. B.}{=} : a^\dagger(\vec{q})a(\vec{r})a^\dagger(\vec{p})a(\vec{k}) : = a^\dagger(\vec{q})a^\dagger(\vec{p})a(\vec{r})a(\vec{k}).$$

Der Referenzzustand für die Normalordnung ist das Vakuum der freien Theorie.

- Nun zur Konstruktion von Zuständen:

Wir definieren einen Teilchenzahloperator

$$N = \int \widetilde{d^3k} a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}). \tag{B.58}$$

Da  $[a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')a(\vec{k}')] = 0$  (nachrechnen!), vertauscht  $N$  sowohl mit dem Hamilton-Operator als auch dem Impulsoperator. Die Vorgehensweise ist sehr ähnlich zum harmonischen Oszillator in der QM.<sup>6</sup> Der Unterschied besteht darin, dass wir es mit einer unendlichen Summe von Oszillatoren zu tun haben ( $\Rightarrow$  Integral  $\int \widetilde{d^3k}$ ), deren Vertauschungsrelationen eine Deltafunktion im Impulsraum beinhalten. Wir betrachten den Zustand

$$|\vec{k}\rangle = a^\dagger(\vec{k})|0\rangle. \tag{B.59}$$

Dieser Zustand ist nicht im üblichen Sinne normiert (vergleichbar mit  $|\vec{x}\rangle$  in der QM), denn

$$\langle 0 | a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle = \langle 0 | a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k})] | 0 \rangle = „\infty“.$$

---

<sup>6</sup>Siehe z. B. J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Redwood City 1985, Kapitel 2.3, oder G. Grawert, *Quantenmechanik*, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden 1977, Kapitel 8.4.

Vergleiche mit den Eigenzuständen des Impulsoperators in der nichtrelativistischen QM:  $\langle \vec{q} | \vec{q}' \rangle = \delta^3(\vec{q} - \vec{q}')$ . Wir arbeiten mit Einteilchenzuständen, die auf eine Deltafunktion normiert sind:

$$\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = \langle 0 | a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}') | 0 \rangle = (2\pi)^3 2\omega(\vec{k}) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (\text{B.60})$$

Wir konstruieren eine Basis des gesamten Hilbert-Raums mittels

$$a^\dagger(\vec{k}_1) \cdots a^\dagger(\vec{k}_n) | 0 \rangle, \quad (\text{B.61})$$

wobei die  $\vec{k}_i$  nicht notwendigerweise verschieden sein müssen. Der somit entstehende Raum wird als Fock-Raum bezeichnet. Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} H a^\dagger(\vec{k}_1) \cdots a^\dagger(\vec{k}_n) | 0 \rangle &= \left( \omega(\vec{k}_1) + \cdots + \omega(\vec{k}_n) \right) a^\dagger(\vec{k}_1) \cdots a^\dagger(\vec{k}_n) | 0 \rangle, \\ \vec{P} \cdots &= \left( \vec{k}_1 + \cdots + \vec{k}_n \right) \cdots, \\ N \cdots &= n \cdots. \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

Beliebige normierte Zustände lassen sich nun als Überlagerung der Vektoren aus Gl. (B.61) folgendermaßen aufbauen:

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= \left( c_0 + \int \widetilde{d^3k_1} c_1(\vec{k}_1) a^\dagger(\vec{k}_1) + \frac{1}{\sqrt{2!}} \int \widetilde{d^3k_1} \widetilde{d^3k_2} c_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2) a^\dagger(\vec{k}_1) a^\dagger(\vec{k}_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{3!}} \int \widetilde{d^3k_1} \widetilde{d^3k_2} \widetilde{d^3k_3} c_3(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) a^\dagger(\vec{k}_1) a^\dagger(\vec{k}_2) a^\dagger(\vec{k}_3) + \cdots \right) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.63})$$

(Beachte: Für  $n$  Objekte gibt es  $n!$  Anordnungen). Hierbei steht  $c_n$  für die Impulsverteilung der Komponente mit  $n$  Quanten (Wellenfunktion im Impulsraum). Betrachte zur Illustration denjenigen Anteil, der aus 2 Quanten besteht:

$$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}} \int \widetilde{d^3k_1} \widetilde{d^3k_2} c_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2) a^\dagger(\vec{k}_1) a^\dagger(\vec{k}_2) | 0 \rangle$$

und benutze die Vertauschungsrelation  $[a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 0$ :

$$\begin{aligned} \cdots &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \int \widetilde{d^3k_1} \widetilde{d^3k_2} c_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2) a^\dagger(\vec{k}_2) a^\dagger(\vec{k}_1) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \int \widetilde{d^3k_1} \widetilde{d^3k_2} c_2(\vec{k}_2, \vec{k}_1) a^\dagger(\vec{k}_1) a^\dagger(\vec{k}_2) | 0 \rangle, \end{aligned}$$

d. h.

$$c_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = c_2(\vec{k}_2, \vec{k}_1).$$

Als Verallgemeinerung gilt, dass die Impulsraumwellenfunktionen symmetrisch bzgl. der Vertauschung zweier beliebiger Argumente sind. Diese so genannte Bose-Einstein-Statistik resultiert aus den Vertauschungsrelationen Gl. (B.50).

Schließlich folgt aus der Normierungsbedingung

$$1 = \langle \Phi | \Phi \rangle = |c_0|^2 + \int \widetilde{d^3k_1} |c_1(\vec{k}_1)|^2 + \int \widetilde{d^3k_1} \widetilde{d^3k_2} |c_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2)|^2 + \dots, \quad (\text{B.64})$$

Für die Basiszustände ist auch die Charakterisierung in der Form von Besetzungszahlen  $n(\vec{k})$  (mögliche Werte:  $0, 1, 2, \dots$ ) des  $\vec{k}$ -ten Impulszustandes üblich:

$$|n(\vec{k}_1), \dots, n(\vec{k}_n)\rangle = \prod_{\vec{k}_i} \frac{1}{\sqrt{n(\vec{k}_i)!}} \left( a^\dagger(\vec{k}_i) \right)^{n(\vec{k}_i)} |0\rangle. \quad (\text{B.65})$$

Beachte insbesondere, dass wegen Gl. (B.50) alle Erzeugungsoperatoren miteinander vertauschen.

## B.3 Quantisierung des Dirac-Feldes

Literatur:

- J. D. Bjorken und S. D. Drell, *Relativistische Quantenfeldtheorie*, BI, Mannheim 1967, Kapitel 13
- C. Itzykson und J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York 1980, Kapitel 3-3
- L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge 1985, Kapitel 4.3

In der Diskussion des skalaren Feldes haben wir so genannte kanonische, gleichzeitige Vertauschungsrelationen für das Feld und den konjugierten Impuls postuliert [siehe Gl. (B.47)]. In Verbindung mit der Fourier-Zerlegung der Lösung der Klein-Gordon-Gleichung, Gl. (B.49), hat uns dies auf Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren geführt, die den Vertauschungsrelationen aus Gl. (B.50) gehorchen. Insbesondere sind wir auf Vielteilchenzustände gestoßen, die symmetrisch bzgl. der Vertauschung zweier beliebiger Impulse sind.

Andererseits genügen Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen der Erfahrung nach der Fermi-Dirac-Statistik und dem Pauli'schen Ausschließungsprinzip. Wir gehen nun in der umgekehrten Reihenfolge vor, d. h. wir zerlegen zunächst die Felder  $\Psi$  und  $\bar{\Psi}$  in Ebene-Welle-Lösungen

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})} [b_r(\vec{p}) u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + d_r^\dagger(\vec{p}) v^{(r)}(\vec{p}) e^{ip \cdot x}] \\ &=: \Psi^{(+)}(x) + \Psi^{(-)}(x), \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(x) &= \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})} [b_r^\dagger(\vec{p}) \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) e^{ip \cdot x} + d_r(\vec{p}) \bar{v}^{(r)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}] \\ &= \bar{\Psi}^{(-)}(x) + \bar{\Psi}^{(+)}(x) = \overline{\Psi^{(+)}(x)} + \overline{\Psi^{(-)}(x)}, \end{aligned} \quad (\text{B.67})$$

mit  $p_0 = E(\vec{p}) = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ . Um das Ausschließungsprinzip zu erfüllen, fordern wir, dass die Erzeugungsoperatoren  $b_r^\dagger$  und  $d_r^\dagger$  (Vernichtungsoperatoren  $b_r$  und  $d_r$ ) für Teilchen und Antiteilchen folgenden Antivertauschungsrelationen gehorchen:<sup>7</sup>

$$\{b_r(\vec{p}), b_s^\dagger(\vec{p}')\} = (2\pi)^3 2E(\vec{p}) \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{rs}, \quad (\text{B.68})$$

$$\{d_r(\vec{p}), d_s^\dagger(\vec{p}')\} = (2\pi)^3 2E(\vec{p}) \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{rs}. \quad (\text{B.69})$$

Einteilchenzustände

$$|t(\vec{p}, r)\rangle = b_r^\dagger(\vec{p})|0\rangle, \quad |\bar{t}(\vec{p}, r)\rangle = d_r^\dagger(\vec{p})|0\rangle,$$

sind normiert auf

$$\langle t(\vec{p}', r') | t(\vec{p}, r) \rangle = (2\pi)^3 2E(\vec{p}) \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}),$$

$$\langle \bar{t}(\vec{p}', r') | \bar{t}(\vec{p}, r) \rangle = (2\pi)^3 2E(\vec{p}) \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}),$$

wobei  $t$  und  $\bar{t}$  symbolisch für Teilchen und Antiteilchen stehen. Dies können z. B. Elektron und Positron, Proton und Antiproton oder Quark und Anti-quark sein.

Alle weiteren Antivertauschungsrelationen sind Null:

$$\begin{aligned} \{b_r(\vec{p}), b_s(\vec{p}')\} &= 0, \\ \{b_r^\dagger(\vec{p}), b_s^\dagger(\vec{p}')\} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

$$\begin{aligned} \{d_r(\vec{p}), d_s(\vec{p}')\} &= 0, \\ \{d_r^\dagger(\vec{p}), d_s^\dagger(\vec{p}')\} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

$$\begin{aligned} \{b_r(\vec{p}), d_s(\vec{p}')\} &= 0, \\ \{b_r^\dagger(\vec{p}), d_s^\dagger(\vec{p}')\} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

$$\begin{aligned} \{b_r(\vec{p}), d_s^\dagger(\vec{p}')\} &= 0, \\ \{d_r(\vec{p}), b_s^\dagger(\vec{p}')\} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

Einige Konsequenzen lassen sich am Einfachsten mittels einer dramatischen Vereinfachung der Nomenklatur herausarbeiten. Dazu ersetzen wir

$$\begin{aligned} b_r(\vec{p}) &\mapsto b_i, \quad \text{usw.} \\ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})} &\mapsto \sum_i, \\ \{b_r(\vec{p}), b_s^\dagger(\vec{p}')\} = (2\pi)^3 2E(\vec{p}) \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{rs} &\mapsto \{b_i, b_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Am Ende einer Rechnung erfolgt dann wieder die Rückersetzung. Wir betrachten nun z. B. einen allgemeinen (Überlagerungs-) Zustand zweier Teil-

---

<sup>7</sup>Die Antivertauschungsrelationen wurden zum ersten Mal in P. Jordan und E. P. Wigner, Z. Phys. **47**, 631 (1928) vorgeschlagen.

chen

$$\begin{aligned}
|\Phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i,j} c_2(i,j) b_i^\dagger b_j^\dagger |0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i,j} c_2(i,j) (-1) b_j^\dagger b_i^\dagger |0\rangle \\
&= - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i,j} c_2(j,i) b_i^\dagger b_j^\dagger |0\rangle,
\end{aligned}$$

d. h. die Wellenfunktion ist (wie erwünscht) antisymmetrisch bzgl. der Vertauschung zweier Argumente

$$c_2(i,j) = -c_2(j,i).$$

Insbesondere verschwindet sie für  $i = j$  (Pauli-Prinzip). Die Normierungsbedingung

$$\langle \Phi | \Phi \rangle = 1$$

führt auf

$$1 = \sum_{i,j} |c_2(i,j)|^2 \mapsto \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})} \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E(\vec{p}')} \sum_{r'=1}^2 c_2(\vec{p}, r; \vec{p}', r') = 1.$$

Kombiniert man die Antivertauschungsrelationen aus Gl. (B.68) - (B.73) mit den Eigenschaften der Dirac-Spinoren aus Abschnitt B.1, Beispiel 3., so ergeben sich für die Antivertauschungsrelationen der Dirac-Felder

$$\{\Psi_\alpha(t, \vec{x}), \Psi_\beta^\dagger(t, \vec{y})\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.74})$$

$$\{\Psi_\alpha(t, \vec{x}), \Psi_\beta(t, \vec{y})\} = 0, \quad (\text{B.75})$$

$$\{\Psi_\alpha^\dagger(t, \vec{x}), \Psi_\beta^\dagger(t, \vec{y})\} = 0, \quad (\text{B.76})$$

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  Dirac-Indizes sind, die Werte von 1 bis 4 annehmen. Wir betrachten stellvertretend

$$\{\Psi_\alpha(t, \vec{x}), \Psi_\beta^\dagger(t, \vec{y})\}$$

und schreiben symbolisch

$$\Psi(x) = \sum_i \left( b_i u_i(x) + d_i^\dagger v_i(x) \right),$$

$$\Psi^\dagger(y) = \sum_i \left( b_i^\dagger u_i^\dagger(y) + d_i v_i^\dagger(y) \right).$$



Damit gilt

$$\begin{aligned}
\{\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta^\dagger(y)\}_{x_0=y_0} &= \sum_{i,j} \{b_i u_{i\alpha}(x) + d_i^\dagger v_{i\alpha}(x), b_j^\dagger u_{j\beta}^\dagger(y) + d_j v_{j\beta}^\dagger(y)\}_{x_0=y_0} \\
&= \sum_{i,j} (u_{i\alpha}(x) u_{j\beta}^\dagger(y) \{b_i, b_j^\dagger\} + u_{i\alpha}(x) v_{j\beta}^\dagger(y) \{b_i, d_j\} \\
&\quad + v_{i\alpha}(x) u_{j\beta}^\dagger(y) \{d_i^\dagger, b_j^\dagger\} + v_{i\alpha}(x) v_{j\beta}^\dagger(y) \{d_i^\dagger, d_j\})_{x_0=y_0} \\
&= \sum_i (u_{i\alpha}(x) u_{i\beta}^\dagger(y) + v_{i\alpha}(x) v_{i\beta}^\dagger(y))_{x_0=y_0}.
\end{aligned}$$

Übersetzung in Kontinuumschreibweise:

$$\begin{aligned}
\dots &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})} \sum_{r=1}^2 \left( u_\alpha^{(r)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} u_\beta^{(r)\dagger}(\vec{p}) e^{ip \cdot y} + v_\alpha^{(r)}(\vec{p}) e^{ip \cdot x} v_\beta^{(r)\dagger}(\vec{p}) e^{-ip \cdot y} \right)_{x_0=y_0} \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})} \sum_{r=1}^2 \left( u_\alpha^{(r)}(\vec{p}) u_\beta^{(r)\dagger}(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} + v_\alpha^{(r)}(\vec{p}) v_\beta^{(r)\dagger}(\vec{p}) e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right).
\end{aligned}$$

Benutze nun

$$\sum_{r=1}^2 u^{(r)}(\vec{p}) u^{(r)\dagger}(\vec{p}) = (E + m) \sum_{r=1}^2 \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} \chi_r \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_r^\dagger 1_{2 \times 2} & \chi_r^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \end{pmatrix}$$

zusammen mit

$$\sum_{r=1}^2 \chi_r \chi_r^\dagger = 1_{2 \times 2}$$

$$\begin{aligned}
\dots &= (E + m) \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} & \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{(E + m)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E + m) & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & (E - m) \end{pmatrix} \\
&= (\not{p} + m) \gamma_0 \quad (p_0 = E(\vec{p}))
\end{aligned}$$

und vollkommen analog

$$\sum_{r=1}^2 v^{(r)}(\vec{p}) v^{(r)\dagger}(\vec{p}) = (\not{p} - m) \gamma_0 \quad (p_0 = E(\vec{p})).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\{\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta^\dagger(y)\}_{x_0=y_0} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})} [(\not{p} + m) \gamma_0 e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \\
&\quad + (\not{p} - m) \gamma_0 e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}]_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Führe im zweiten Term die Substitution  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$  durch, beachte  $E(-\vec{p}) = E(\vec{p})$  und  $\gamma_0^2 = 1$ :

$$\dots = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \delta_{\alpha\beta} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}).$$

Wir betrachten schließlich noch den Hamilton-Operator. Ausgehend von der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m)\Psi$$

definieren wir das kanonisch konjugierte Impulsfeld

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} = i\Psi^\dagger$$

und erhalten für die Hamilton-Dichte

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\Psi} - \mathcal{L} = i\Psi^\dagger \dot{\Psi} - \bar{\Psi}(i\gamma_0 \partial_0 + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m)\Psi = \bar{\Psi}(-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m)\Psi = \Psi^\dagger i\dot{\Psi}$$

für Lösungen der Dirac-Gleichung. Im Gegensatz zum Klein-Gordon-Feld genügt allein die Tatsache, die Dirac-Gleichung als Feldgleichung zu interpretieren, nicht, um das „Problem“ negativer Energien zu beseitigen. Dies gelingt erst mit Hilfe der Quantisierung und der Forderung nach Antivertauschungsrelationen. Wir betrachten dazu den Hamilton-Operator

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \mathcal{H} \\ &= \int d^3x \underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})} \sum_{r=1}^2}_{\Sigma} \underbrace{\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E(\vec{p}') \sum_{r'=1}^2}}_{\Sigma'} \\ &\quad \times [b_r^\dagger(\vec{p})u^{(r)\dagger}(\vec{p})e^{ip \cdot x} + d_r(\vec{p})v^{(r)\dagger}(\vec{p})e^{-ip \cdot x}] \\ &\quad \times i[-iE(\vec{p}')] [b_{r'}(\vec{p}')u^{(r')}(\vec{p}')e^{-ip' \cdot x} \quad \underbrace{-}_{\text{Vorzeichen!}} \quad d_{r'}^\dagger(\vec{p}')v^{(r')}(\vec{p}')e^{ip' \cdot x}], \end{aligned}$$

führen die Integration  $\int d^3x$  durch

$$\begin{aligned} \dots &= \sum \sum' E(\vec{p}') \\ &\quad \left[ b_r^\dagger(\vec{p})b_{r'}(\vec{p}')u^{(r)\dagger}(\vec{p})u^{(r')}(\vec{p}')e^{ix_0[E(\vec{p})-E(\vec{p}')]}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \right. \\ &\quad - b_r^\dagger(\vec{p})d_{r'}^\dagger(\vec{p}')u^{(r)\dagger}(\vec{p})v^{(r')}(\vec{p}')e^{ix_0[E(\vec{p})+E(\vec{p}')]}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}+\vec{p}') \\ &\quad + d_r(\vec{p})b_{r'}(\vec{p}')v^{(r)\dagger}(\vec{p})u^{(r')}(\vec{p}')e^{-ix_0[E(\vec{p})+E(\vec{p}')]}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}+\vec{p}') \\ &\quad \left. - d_r(\vec{p})d_{r'}^\dagger(\vec{p}')v^{(r)\dagger}(\vec{p})v^{(r')}(\vec{p}')e^{-ix_0[E(\vec{p})-E(\vec{p}')]}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \right], \end{aligned}$$

führen die Integration  $\int d^3p$  durch

$$\begin{aligned}
\cdots &= \sum_{r=1}^2 \sum_{\vec{p}'} E(\vec{p}') \\
&\times \left[ \frac{1}{2E(\vec{p}')} b_r^\dagger(\vec{p}') b_{r'}(\vec{p}') \underbrace{u^{(r)\dagger}(\vec{p}') u^{(r')}(\vec{p}')}_{2E(\vec{p}') \delta_{rr'}} \underbrace{e^{ix_0[E(\vec{p}')-E(\vec{p}')]}_1} \right. \\
&- \frac{1}{2E(-\vec{p}')} b_r^\dagger(-\vec{p}') d_{r'}^\dagger(\vec{p}') \underbrace{u^{(r)\dagger}(-\vec{p}') v^{(r')}(\vec{p}')}_0 e^{ix_0(E(-\vec{p}')+E(\vec{p}'))} \\
&+ \frac{1}{2E(-\vec{p}')} d_r(-\vec{p}') b_{r'}(\vec{p}') \underbrace{v^{(r)\dagger}(-\vec{p}') u^{(r')}(\vec{p}')}_0 e^{-ix_0[E(-\vec{p}')+E(\vec{p}')]} \\
&\left. - \frac{1}{2E(\vec{p}')} d_r(\vec{p}') d_{r'}^\dagger(\vec{p}') \underbrace{v^{(r)\dagger}(\vec{p}') v^{(r')}(\vec{p}')}_{2E(\vec{p}') \delta_{rr'}} \underbrace{e^{-ix_0[E(\vec{p}')-E(\vec{p}')]}_1} \right],
\end{aligned}$$

berücksichtigen  $E(\vec{p}') = E(-\vec{p}')$ , führen die Summe  $\sum_{r'}$  aus und benennen am Ende  $\vec{p}' \rightarrow \vec{p}$  um:

$$\cdots = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})} \sum_{r=1}^2 E(\vec{p}) [b_r^\dagger(\vec{p}) b_r(\vec{p}) - d_r(\vec{p}) d_r^\dagger(\vec{p})].$$

Beachte, dass wir bisher ausschließlich von den Eigenschaften der Dirac-Spinoren Gebrauch gemacht haben. Dabei haben wir allerdings darauf geachtet, dass die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in derselben Reihenfolge stehen, in der sie beim Multiplizieren aufgetreten sind. Auch hier führen wir eine Normalordnungsvorschrift ein, aber dieses Mal mit der Konvention eines Vorzeichenwechsels für jede Vertauschung von Fermionenoperatoren. Zum Beispiel gilt für die Normalordnung des bilinearen Produktes

$$\begin{aligned}
: \bar{\Psi} \Gamma \Psi : &= : (\bar{\Psi}_\alpha^{(-)} + \bar{\Psi}_\alpha^{(+)}) \Gamma_{\alpha\beta} (\Psi_\beta^{(+)} + \Psi_\beta^{(-)}) : \\
&= \bar{\Psi}_\alpha^{(-)} \Gamma_{\alpha\beta} \Psi_\beta^{(+)} + \bar{\Psi}_\alpha^{(-)} \Gamma_{\alpha\beta} \Psi_\beta^{(-)} + \bar{\Psi}_\alpha^{(+)} \Gamma_{\alpha\beta} \Psi_\beta^{(+)} - \bar{\Psi}_\alpha^{(+)} \Gamma_{\alpha\beta} \Psi_\beta^{(-)},
\end{aligned} \tag{B.77}$$

wobei  $\Gamma$  eine beliebige  $4 \times 4$ -Matrix ist. Für den normalgeordneten Hamilton-Operator ergibt sich

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3x : \Psi^\dagger(x) i \dot{\Psi}(x) : \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})} \sum_{r=1}^2 E(\vec{p}) [b_r^\dagger(\vec{p}) b_r(\vec{p}) + d_r^\dagger(\vec{p}) d_r(\vec{p})].
\end{aligned}$$

Durch den Vorzeichenwechsel im zweiten Summanden ist der Hamilton-Operator jetzt positiv definit. Hätten wir versucht, anstelle der Antivertauschungsrelationen aus Gl. (B.68) - (B.73) mit Vertauschungsrelationen zu arbeiten, dann wäre der Hamilton-Operator nicht nach unten beschränkt. Wenn man die Existenz eines Zustands niedrigster Energie fordert (d. h. eines stabilen Grundzustandes), so muss die Dirac-Gleichung der Fermi-Dirac-Statistik entsprechend quantisiert werden. Wir sehen hier ein spezielles Beispiel für das so genannte Spin-Statistik-Theorem, wonach Fermionen mit Antivertauschungsrelationen und Bosonen mit Vertauschungsrelationen quantisiert werden müssen (siehe z. B. W. Pauli, Phys. Rev. **58**, 716 (1940)).

# Anhang C

## Einige Formeln zur SU(3)

Elemente von SU(3):

$$U(\Theta) = \exp\left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a \frac{\lambda_a}{2}\right), \quad \Theta_a \in \mathbb{R}.$$

Gell-Mann-Matrizen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_a}{2} &= i \frac{\partial U}{\partial \Theta_a}(0, \dots, 0), \\ \lambda_a &= \lambda_a^\dagger, \\ \text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) &= 2\delta_{ab}, \\ \text{Tr}(\lambda_a) &= 0. \end{aligned}$$

Vertauschungsrelationen:

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}.$$

Vollständig antisymmetrische, nichtverschwindende Strukturkonstanten:

$abc$	123	147	156	246	257	345	367	458	678
$f_{abc}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Antikommutatoren:

$$\{\lambda_a, \lambda_b\} = \frac{4}{3}\delta_{ab} + 2d_{abc}\lambda_c.$$

Vollständig symmetrische, nichtverschwindende  $d$ -Symbole:

$abc$	118	146	157	228	247	256	338	344
$d_{abc}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$
$abc$	355	366	377	448	558	668	778	888
$d_{abc}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

- Viele nützliche Eigenschaften der Gell-Mann-Matrizen findet man in Abschnitt 8 von CORE (Compendium of relations) zusammengestellt von V. I. Borodulin, R. N. Rogalyov und S. R. Slabospitsky, hep-ph/9507456.