Übungsblatt 8

zum Mathematischen Brückenkurs für PhysikerInnen und ChemikerInnen

im Wintersemester 2018/19

Dozent: PD Dr. G. von Hippel

1. *Differentialgleichungen erster Ordnung*

   Finden Sie jeweils die Lösung für das Anfangswertproblem $u(0) = u_0$ mit $u_0 > 0$ zu folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung:

   1. $u'(x) + x^n u(x) = 0$, $n > -1$
   2. $u'(x) - u(x)^3 = 0$
   3. $u'(x) + x^2 u(x)^2 = u(x)$
   4. $(1 + x)u'(x) = [xu(x)]^2$
   5. $(1 + x)^2 u'(x) - x^2 u(x) = 0$
   6. $u'(x) \cos x = -u(x) \sin x$
   7. $\left(x^2 + 1\right) u'(x) + 2xu(x) = 0$
   8. $(2xu(x) + 1)u'(x) + u(x)^2 = 0$
   9. $(u(x) - x^3)u'(x) - 3x^2 u(x) = 3x^5$
   10. $2x - u(x) - xu'(x) + 2u(x)u'(x) = 0$
   11. $u(x)u'(x) + \sqrt{x^2 + u(x)^2} + x = 0$
   12. $2u(x)u'(x) + u(x)^2 + e^{-x} = 0$

2. *Einige spezielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung*

   (a) Finden Sie für die folgenden Differentialgleichungen jeweils eine Lösung in Form eines Polynoms vom Grad n für $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, dessen führender Koeffizient gleich Eins ist:

   1. $p''(t) - 2tp'(t) + 2np(t) = 0$
   2. $tp''(t) + (1 - t)p'(t) + np(t) = 0$
   3. $(1 - t^2)p''(t) - 2tp'(t) + n(n + 1)p(t) = 0$
   4. $(1 - t^2)p''(t) - 3tp'(t) + n(n + 2)p(t) = 0$

   (b) Verifizieren Sie, dass für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ die Lösungen des Anfangswertproblems

   $$-u_k''(x) + x^2 u_k(x) = (2k + 1)u_k(x), \qquad u_k(0) = \frac{1 + (-1)^k}{2}, \quad u_k'(0) = \frac{1 - (-1)^k}{2}$$

   durch

   $$u_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad u_1(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}, \quad u_2(x) = (1 - 2x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad u_3(x) = x(1 - \frac{2}{3}x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

   gegeben sind.

3. *Erzwungene Schwingungen*

   (a) Verifizieren Sie, dass für $\gamma > 0$ oder $\omega \neq \omega_0$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

   $$f''(t) + 2\gamma f'(t) + \omega_0^2 f(t) = A \sin(\omega t)$$

   durch

   $$f(t) = \frac{A\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin(t\omega) - 2A\gamma\omega\cos(t\omega)}{4\gamma^2\omega^2 + \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}$$

   gegeben ist. Interpretieren Sie diese Lösung in Hinsicht auf die in der Vorlesung angegebene komplexifizierte Lösung. (Hinweis: Benutzen Sie die Euler-Formel!)

(b) Verifizieren Sie ferner, dass für $\gamma = 0$, $\omega = \omega_0$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$f''(t) + \omega_0^2 f(t) = A \sin(\omega_0 t)$$

durch

$$f(t) = -\frac{At\cos(\omega_0 t)}{2\omega_0}$$

gegeben ist. Interpretieren Sie diese Lösung im Hinblick auf das Verhalten ungedämpft schwingender Systeme unter resonanter Anregung.

(c) Verifizieren Sie zu guter Letzt, dass eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$f''(t) + \omega_0^2 f(t) = h(t)$$

für stetiges h durch

$$f(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} \int_0^t \cos(\omega_0 \tau) h(\tau)\, \mathrm{d}\tau - \frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0} \int_0^t \sin(\omega_0 \tau) h(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

gegeben ist.

4. *Das Eulersche Polygonzugverfahren**

Sehr oft können Differentialgleichungen nicht analytisch gelöst werden. In diesem Fall sind numerische Näherungsverfahren von großer praktischer Bedeutung. Ein einfaches solches Verfahren ist das Eulersche Polygonzugverfahren, in dem die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(y(t), t) \qquad y(0) = y_0$$

durch einen Polygonzug

$$\tilde{y}(t) = y_n + (t - nh) f(y_n, nh) \quad \text{für } t \in [nh; (n+1)h]$$

mit der rekursiv definierten Folge von Vertices

$$y_{n+1} = y_n + h f(y_n, nh)$$

angenähert wird.

(a) Welche Folge von Vertices y_n ergibt sich für die Wachstumsgleichung? Was geschieht im Limes $h \to 0$?

(b) Wenden Sie das Eulersche Polygonzugverfahren auf die Probleme aus Aufgabe 1 an und vergleichen Sie die Folge der Vertices jeweils mit der exakten Lösung.