Übungsblatt 6

zum Mathematischen Brückenkurs für PhysikerInnen und ChemikerInnen

im Wintersemester 2018/19

Dozent: PD Dr. G. von Hippel

1. *Bewegung entlang gekrümmter Kurven*

   Berechnen Sie für folgende Bahnkurven $x : [0;T] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \boldsymbol{x}(t)$ jeweils die Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{x}}$ und Beschleunigung $\ddot{\boldsymbol{x}}$ als Funktion der Zeit t. Bestimmen Sie (soweit möglich) ferner die gesamte zurückgelegte Strecke $s = \int_0^T |\dot{\boldsymbol{x}}| \, \mathrm{d}t$.

   1. $\boldsymbol{x}(t) = (vt, 0, 0)$
   2. $\boldsymbol{x}(t) = (0, 0, ut)$
   3. $\boldsymbol{x}(t) = (v_1 t, v_2 t, v_3 t)$
   4. $\boldsymbol{x}(t) = (d, d, h - kt^2)$
   5. $\boldsymbol{x}(t) = (d, d + wt, h - \frac{1}{2} g t^2)$
   6. $\boldsymbol{x}(t) = (s_1 + w_1 t, s_2 + w_2 t, s_3 + w_3 t - \frac{a}{2} t^2)$
   7. $\boldsymbol{x}(t) = (r \sin(2\pi t/T), r \cos(2\pi t/T), 0)$
   8. $\boldsymbol{x}(t) = (r \sin(2\pi t/T), r \cos(2\pi t/T), ut)$
   9. $\boldsymbol{x}(t) = (r \sin(2\pi t/T), r \cos(2\pi t/T), t(u - kt))$
   10. $\boldsymbol{x}(t) = (a \sin(2\pi t/T), b \cos(2\pi t/T), 0)$
   11. $\boldsymbol{x}(t) = (a \cos(2\pi t/T), b \sin(2\pi t/T), 0)$
   12. $\boldsymbol{x}(t) = (a \sin(2\pi t/T), b \cos(2\pi t/T), c \sin(8\pi t/T))$
   13. $\boldsymbol{x}(t) = (v(t - T/2), 0, \sqrt{d^2 + u^2 (t - T/2)^2})$
   14. $\boldsymbol{x}(t) = (aT/(t + T), bT/(t + T), ct/(t + T))$
   15. $\boldsymbol{x}(t) = (d + vt, d - vt, R + a \sin(2\pi t/T))$
   16. $\boldsymbol{x}(t) = (\lambda \mathrm{e}^{-\alpha t/T}, \mu \mathrm{e}^{\beta t/T}, \xi t/T)$
   17. $\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t/T} (R \cos(2\pi t/T), R \sin(2\pi t/T), R)$
   18. $\boldsymbol{x}(t) = (\frac{RT}{t+T} \cos(2\pi t/T), \frac{RT}{t+T} \sin(2\pi t/T), 0)$

2. *Partielle Ableitungen*

   Bestimmen Sie jeweils die ersten und zweiten (einschließlich aller gemischten) partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen nach den angegebenen Variablen. Verifizieren Sie jeweils, dass die partiellen Ableitungen vertauschen.

   1. $f(x, y) = x + y^2$
   2. $g(x, y, z) = x + y + z - xy - yz - zx + xyz$
   3. $h(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma^2 + \delta^2}$
   4. $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$
   5. $V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
   6. $G(\phi_1, \phi_2) = (\phi_1^2 + \phi_2^2)$
   7. $H(\phi_1, \phi_2) = (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$
   8. $V(\phi_1, \phi_2) = \left(\phi_1^2 + \phi_2^2 - v^2\right)^2$
   9. $S(\alpha, \omega) = \frac{\alpha\omega}{\alpha^2 + \omega^2 + 1}$
   10. $P(r, s) = \mathrm{e}^{-(r^2 + s^2)}$
   11. $p(x, y, z) = \mathrm{e}^{-\alpha x^2 - \beta y^2 - \gamma z^2}$
   12. $f(x, y) = \sin(xy) \cos(x + y)$
   13. $\zeta(s_1, s_2) = (s_1 + s_2) \mathrm{e}^{-s_1} \sin^2(s_2)$
   14. $a(\omega, \gamma, \phi, t) = \frac{A}{\omega^2 - \gamma^2} \sin(\omega t + \phi)$
   15. $A(s, \Gamma) = \frac{1}{(s^2 - \Gamma^2)^2 + 4 s^2 \Gamma^2}$
   16. $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sin\left(\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_k\right)$

3. *Jacobi-Matrix*

   Geben Sie für die folgenden vektorwertigen Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jeweils die Jacobi-Matrix an.

   1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (x_1, x_1, x_2, x_2)$
   2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = (y_2 y_3, y_1/y_3)$
   3. $\Sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\lambda}) = (a \sin\lambda_1 \sin\lambda_2, b\cos\lambda_1 \sin\lambda_2, c\cos\lambda_2)$
   4. $Z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{c}) = (c_1 \sin c_2, c_1 \cos c_2, c_3)$
   5. $\Theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{x}) = (x_1 + \xi x_2, x_2)$
   6. $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = (x_1 + \xi x_2^3, x_2)$
   7. $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{z}) = (\sqrt{z_1^2 + \eta z_3^2}, z_1, z_2, z_3 + \eta z_1)$
   8. $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ K_i(\boldsymbol{x}) = \cos\left(\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_k\right)$

4. *Kurvenintegrale*

   Berechnen Sie jeweils die Kurvenintegrale der Vektorfelder

   1. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}$
   2. $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$
   3. $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = (x_2, -x_1, x_3)$
   4. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \nabla(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})$
   5. $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$
   6. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$
   7. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x})^\alpha \boldsymbol{a}$
   8. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x})^\alpha \boldsymbol{x}$
   9. $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^\alpha \boldsymbol{a}$
   10. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^\alpha \boldsymbol{x}$
   11. $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{a}$
   12. $f_i(\boldsymbol{x}) = \sin\left(\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_k\right)$

   längs der beiden Kurven

$$\mathcal{C}_1 = \{(0,0,t) | t \in [0;1]\},$$
$$\mathcal{C}_2 = \{(\cos(t), \sin(t), 0) | t \in [0;2\pi]\}.$$