# Übungsblatt 4

## zum Mathematischen Brückenkurs für PhysikerInnen und ChemikerInnen

## im Wintersemester 2018/19

Dozent: PD Dr. G. von Hippel

1. *Eigenschaften der Hyperbelfunktionen*

   Zeigen Sie, dass die Hyperbelfunktionen sinh und cosh folgenden Beziehungen genügen:

   1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
   2. $\sinh(ix) = i \sin x$
   3. $\cosh(ix) = \cos x$
   4. $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh(2x)$
   5. $\sinh x + \cosh x = \mathrm{e}^x$
   6. $\cosh x - \sinh x = \mathrm{e}^{-x}$

2. *Ableitungen von Umkehrfunktionen*

   Benutzen Sie jeweils die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion, um die Ableitungen folgender Funktionen zu bestimmen:

   1. $x \mapsto \arcsin x$
   2. $x \mapsto \arctan x$
   3. $x \mapsto \operatorname{arsinh} x$
   4. $x \mapsto \operatorname{artanh} x$

3. *Stammfunktionen*

   Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ jeweils die maximale Definitionsmenge $D$ sowie eine Stammfunktion auf $D$:

   1. $f(x) = x^2$
   2. $f(x) = \frac{1}{x^4}$
   3. $f(x) = x^5 + x^3 - x$
   4. $f(x) = (x^2 - 1)^2$
   5. $f(x) = \mathrm{e}^x$
   6. $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$
   7. $f(x) = \sin x$
   8. $f(x) = \cos(x + a)$
   9. $f(x) = \sinh x$
   10. $f(x) = \cosh x$
   11. $f(x) = \log x$
   12. $f(x) = ax^2 + \mathrm{e}^{-bx} + \log(cx + d)$
   13. $f(x) = x \log x$
   14. $f(x) = x^n \log x$
   15. $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$
   16. $f(x) = x\mathrm{e}^x$
   17. $f(x) = \mathrm{e}^{ax} \sin(\omega x)$
   18. $f(x) = \sin x \cos x$
   19. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
   20. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$
   21. $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(\lambda x)} \cos(\lambda x)$
   22. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
   23. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}$
   24. $f(x) = \mathrm{e}^{-\sin^2 x} \cos x \sin x$
   25. $f(x) = \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}$
   26. $f(x) = \frac{7x^3-5x^2-6}{x^4-x^3-x^2-x-2}$

4. *Bestimmte Integrale*

   Bestimmen Sie jeweils den Wert der folgenden bestimmten Integrale:

   1. $\int_0^1 x \, \mathrm{d}x$
   2. $\int_a^b x^n \, \mathrm{d}x$
   3. $\int_\alpha^\beta (3x^2 - 2\beta x + \alpha\beta) \, \mathrm{d}x$
   4. $\int_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$
   5. $\int_0^\pi \sin\alpha \, \mathrm{d}\alpha$
   6. $\int_0^\pi \cos\beta \, \mathrm{d}\beta$
   7. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x$
   8. $\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2} \, \mathrm{d}x$
   9. $\int_0^2 \frac{2x}{1+x^2} \mathrm{d}x$
   10. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \log x \, \mathrm{d}x$
   11. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\log x}{x} \mathrm{d}x$
   12. $\int_0^{2\pi} \sin^2\omega \, \mathrm{d}\omega$
   13. $\int_0^{2\pi} \sin^2\omega \cos\omega \, \mathrm{d}\omega$
   14. $\int_{-\pi}^{\pi/3} \sin x \cos x \, \mathrm{d}x$
   15. $\int_1^{\mathrm{e}^n} x^n \log x \, \mathrm{d}x$
   16. $\int_0^1 \frac{7x^3-5x^2-6}{x^4-x^3-x^2-x-2} \mathrm{d}x$
   17. $\int_2^3 \frac{2x^3}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x$
   18. $\int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{1-xy}$, $y < 1$
   19. $\int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{1+xy}$, $y > 0$
   20. $\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\sin^2 x} \cos x \sin x \, \mathrm{d}x$
   21. $\int_{-1}^1 \tanh t \, \mathrm{d}t$
   22. $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\log(\log\xi)}{\xi} \mathrm{d}\xi$
   23. $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\log\xi \log(\log\xi)}{\xi} \mathrm{d}\xi$
   24. $\int_0^\omega \sinh(\cosh u) \sinh u \, \mathrm{d}u$
   25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x+9)\cos x}{\cos^2 x+8} \, \mathrm{d}x$
   26. $\int_0^2 x^5 \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$

5. *Uneigentliche Integrale*

   Bestimmen Sie jeweils, ob folgende uneigentliche Integrale existieren und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Wert:

   1. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}$
   2. $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y}$
   3. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$
   4. $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$
   5. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$
   6. $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}$
   7. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}$
   8. $\int_0^\infty \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$
   9. $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$
   10. $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$
   11. $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$
   12. $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$
   13. $\int_{-\infty}^\infty x\mathrm{e}^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x$
   14. $\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{1+\omega^2}$