Zusammenfassung zum Thema Folgen und Reihen

Mathematischer Brückenkurs (A)
für PhysikerInnen und ChemikerInnen

WS 2018/2019

Der Begriff der Funktion
Eine Funktion $f : D \to W$ ist eine Vorschrift, die jedem Element x der Definitionsmenge D genau ein Element $f(x)$ der Zielmenge W eindeutig zuordnet, $x \mapsto f(x)$.
Diese Zuordnung kann, muss aber nicht, in Form einer Rechenvorschrift (wie z.B. $f(x) = x^2$) erfolgen; auch die Vorschrift, jeder/jedem Studierenden an der JGU ihre/seine Matrikelnummer zuzuordnen, stellt eine Funktion (von der Menge der Studierenden in die Menge der natürlichen Zahlen) dar. Entscheidend ist, dass der Funktionswert für jedes zulässige Argument eindeutig festgelegt ist.
Für Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ definieren wir die Verkettung $g \circ f : A \to C$ durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Die Bildmenge von f, $\mathrm{Im}\, f = \{f(x)|x \in D\} \subseteq W$, ist die Menge aller auftretenden Funktionswerte.
Eine Funktion f kann durch ihren Graphen, $\mathrm{Graph}\, f = \{(x, f(x))|x \in D\} \subset D \times W$, repräsentiert werden.
Eine Funktion $f : D \to W$ heißt

- injektiv, wenn $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$,
- surjektiv, wenn $\forall y \in W \exists x \in D \; y = f(x)$,
- bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Für bijektives $f : D \to W$ existiert eine Umkehrfunktion $f^{-1} : W \to D$, die $\forall x \in D \; f^{-1}(f(x)) = x$ und $\forall y \in W \; f(f^{-1}(y)) = y$ erfüllt.

Zahlenfolgen und Grenzwerte
Unter einer Zahlenfolge verstehen wir eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ (oder $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $n \mapsto a_n$). Die a_n heißen Glieder der Folge.
Eine reellwertige Zahlenfolge a_n heißt

- nach oben beschränkt, wenn $\exists S \in \mathbb{R} \; \forall n \in \mathbb{N} \; a_n \leq S$,
- nach unten beschränkt, wenn $\exists S \in \mathbb{R} \; \forall n \in \mathbb{N} \; a_n \geq S$,
- beschränkt, wenn $\exists S \in \mathbb{R} \; \forall n \in \mathbb{N} \; |a_n| \leq S$,
- monoton wachsend, wenn $\forall n \in \mathbb{N} \; a_{n+1} \geq a_n$,
- monoton fallend, wenn $\forall n \in \mathbb{N} \; a_{n+1} \leq a_n$,
- streng monoton wachsend, wenn $\forall n \in \mathbb{N} \; a_{n+1} > a_n$,
- streng monoton fallend, wenn $\forall n \in \mathbb{N} \; a_{n+1} < a_n$,
- alternierend, wenn $\forall n \in \mathbb{N} \; a_{n+1} a_n < 0$,
- Nullfolge, wenn $\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N \; |a_n| < \epsilon$.

Für eine komplexwertige Zahlenfolge machen hiervon nur die Begriffe “beschränkt” und “Nullfolge” (mit der jeweils gleichen Definition wie für reellwertige Folgen) Sinn.
Eine Zahl a heißt Grenzwert (Limes) der Folge a_n, $a = \lim_{n \to \infty} a_n$, wenn $(a_n - a)$ Nullfolge ist.
Insbesondere hat eine Nullfolge den Limes Null.

Eine Folge heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert hat. Eine Folge, die keinen Grenzwert hat, heißt divergent. Von einer reellwertigen Folge, die keinen Grenzwert hat, sagen wir sie divergiere gegen $+\infty$, wenn $\forall S \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ a_n > S$, und sie divergiere gegen $-\infty$, wenn $\forall S \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ a_n < S$. Von sonstigen reellwertigen Folgen sagen wir auch, sie seien unbestimmt divergent.

Rekursiv definierte Folgen
Aufgrund des Prinzips der vollständigen Induktion kann eine Folge über eine Rekursionsrelation $a_{n+1} = f(a_n, \ldots, a_{n-k})$ zusammen mit $k+1$ Startwerten $a_0, \ldots, a_k$ definiert werden.
Ein wichtiger Spezialfall ist die Fixpunktiteration: Für Funktionen $f : D \to D$, $D \subseteq \mathbb{R}$, die für alle a, $b \in D$ die Ungleichung $|f(a) - f(b)| \leq q|a-b|$ mit einer Konstanten $q \in (0;1)$ erfüllen, konvergiert die Folge $a_{n+1} = f(a_n)$ gegen die (eindeutige) Lösung von $x = f(x)$.
Ein weiterer wichtiger Spezialfall sind Rekursionen der Form $a_{n+1} = \alpha_0 a_n + \ldots + \alpha_k a_{n-k}$, die sich mit dem Ansatz $a_n = \lambda^n$ lösen lassen: Man löst $\lambda^{k+1} = \alpha_0\lambda^k + \ldots + \alpha_{k-1}\lambda + \alpha_k$, um $k+1$ Lösungen $\lambda_i \in \mathbb{C}$ zu finden. Da mit den λ_i^n auch jede Kombination der Form $a_n = C_1\lambda_1^n + \ldots + C_k\lambda_{k+1}^n$ (mit Konstanten $C_i \in \mathbb{C}$) die Rekursion löst, können die $k+1$ Konstanten C_i aus den $k+1$ Startwerten durch Lösen des linearen Gleichungssystems ($a_n = C_1\lambda_1^n + \ldots + C_k\lambda_{k+1}^n$, $n = 0, \ldots, k$) bestimmt werden.
Ein bekanntes Beispiel sind die Fibonacci-Zahlen, die durch $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ definiert sind, mit der Lösung $a_n = (\lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1})/(\lambda_+ - \lambda_-)$, wobei $\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Unendliche Reihen
Für eine Folge a_n definieren wir die Folge der Partialsummen

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$$

und die unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \equiv \lim_{N\to\infty} S_N\,,$$

falls dieser Grenzwert existiert. Falls der Grenzwert nicht existiert, heißt die unendliche Reihe divergent.
Die geometrische Reihe ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

für $|q| < 1$ (sonst divergent) wegen der "Teleskopsumme"

$$(1-q)\sum_{n=0}^{N} q^n = \sum_{n=0}^{N}\left(q^n - q^{n+1}\right) = 1 - q^{N+1}\,,$$

während die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

wegen

$$\sum_{n=1}^{2^N} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{N}{2}$$

divergiert.