Übungsblatt 3

zum Mathematischen Brückenkurs
für PhysikerInnen und ChemikerInnen

im Wintersemester 2018/19

Dozent: PD Dr. G. von Hippel

1. *Eigenschaften von reellen Funktionen*

   Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils, ob diese nach oben bzw. nach unten beschränkt, beschränkt, monoton wachsend bzw. fallend, streng monoton wachsend bzw. fallend, und gerade bzw. ungerade sind.

   1. $f(x) = x^2$
   2. $f(x) = \mathrm{e}^x$
   3. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$
   4. $f(x) = \sin x$
   5. $f(x) = \sin(x^2)$
   6. $f(x) = x^5 + x^3 - x$
   7. $f(x) = (x^2 - 1)^2$
   8. $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$
   9. $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$
   10. $f(x) = x \log(x^2 + 1)$

2. *Grenzwerte von Funktionen*

   Bestimmen Sie jeweils die folgenden Grenzwerte:

   1. $\lim\limits_{x\to 0} x^2$
   2. $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-x^2}$
   3. $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$
   4. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2+1}$
   5. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(x + \sqrt{x-1}\right)$
   6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{2x}$
   7. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^2-1)^2}{1-x}$
   8. $\lim\limits_{x\to 0} x \cot x$
   9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{\sinh^3 x}$
   10. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

3. *Ableitung von Funktionen – I*

   Bestimmen Sie jeweils die Ableitung folgender Funktionen ausgehend von der Definition der Ableitung:

   1. $f(x) = x^2$
   2. $f(x) = x^3$
   3. $f(y) = \sin y$
   4. $f(y) = \cos x$

4. *Ableitung von Funktionen – II*

   Bestimmen Sie jeweils die Ableitung folgender Funktionen nach dem angegebenen Argument, und geben Sie die zugehörigen Definitionsbereiche an:

   1. $f(x) = x^2$
   2. $f(x) = x^n + x^p - c,\ n \in \mathbb{N},\ p > 0$
   3. $g(\omega) = \sin(\omega t + \varphi)$
   4. $h(t) = \sin(\omega t + \varphi)$
   5. $f(s) = \sqrt{s^2 + 1}$
   6. $p(q) = -(q^2 - a^2)^2$
   7. $S(h) = \mathrm{e}^{\alpha h^2 + \beta h - \gamma} + \mathrm{e}^{\omega h}$
   8. $\lambda(x) = x \sin x + x^2 \cos x$
   9. $\rho(\sigma) = \sigma \log \sigma - \sigma$
   10. $\theta(z) = \sum_{k=1}^{8} k z^k$
   11. $f(y) = \frac{y^2 - 2y - 1}{y^2 + 4}$
   12. $f(y) = \frac{y^2 - 2y - 1}{y^2 - 4}$
   13. $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{x^2}}$
   14. $s(x) = x\sqrt{1 + x^2}$
   15. $w(t) = \sqrt{(1 - x^2)^2}$
   16. $\sigma(t) = |t + 1|$
   17. $r(t) = \sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t + \phi)$
   18. $z(x) = \frac{\sin x - \cos x}{x^2 + 2}$
   19. $k(x) = \log \sqrt{x^4 + 1}$
   20. $f(x) = \sqrt{\log(x^4 + 1)}$

5. *Höhere Ableitungen*

   Bestimmen Sie jeweils die ersten, zweiten und dritten Ableitungen folgender Funktionen nach dem angegebenen Argument:

   1. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
   2. $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
   3. $g(y) = y \log y$
   4. $h(r) = \frac{1}{1 + r^2}$
   5. $u(\tau) = \sin^2(\tau^3)$
   6. $g(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$
   7. $f(x) = \sin(\alpha x) + \alpha \cos x$
   8. $t(\alpha) = \tan \alpha$

6. *Taylor-Reihen*

   Entwickeln Sie folgende Funktionen jeweils in eine Taylor-Reihe um den angegebenen Punkt:

   1. $P(x) = x^2 + px + q,\ x = p$
   2. $f(x) = \mathrm{e}^{-x},\ x = 0$
   3. $f(x) = \sin x,\ x = \pi$
   4. $f(y) = \log y,\ y = 1$
   5. $f(x) = \log(x + 1),\ x = 0$
   6. $g(\rho) = \frac{1}{1 - \rho},\ \rho = 0$

7. *Extrema von Funktionen*

   Bestimmen Sie jeweils alle lokalen sowie die globalen Extrema der folgenden Funktionen auf dem angegebenen Definitionsbereich:

   1. $f(x) = \lambda(x^2 - v^2)^2,\ x \in \mathbb{R}$
   2. $f(x) = \mathrm{e}^{-x},\ x \in [0; 1]$
   3. $f(x) = \sin x,\ x \in [-\pi/2; \pi]$
   4. $f(x) = |x^2 - 1|,\ x \in [-2; 5]$
   5. $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x^2},\ x \in [0; \infty)$
   6. $g(t) = \frac{t + 1}{t^2 - 4},\ t \in \mathbb{R} \backslash \{\pm 2\}$