Name:

Gruppe:

Bearbeitungszeit:

1	2	3	4	$\sum$

Theoretische Physik 1 (B. Ed.) – Übung 9

1. [2, 3, 5, 4, 3] Es sei $\vec{r} = (x, y, z)$ der Ortsvektor eines Teilchens der Masse m. Die Lagrange-Funktion

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + \frac{qB_0}{\mathrm{c}} x\dot{y}$$

beschreibt ein geladenes Teilchen mit Ladung q in einem konstanten, homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \hat{e}_z$ mit $B_0 \neq 0$.

(a) Wie lauten die zu x, y und z kanonisch konjugierten Impulse p_x, p_y und p_z?

(b) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen für x, y und z.

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x(0) = y(0) = z(0) &= 0, \\ \dot{x}(0) &= v_0 \neq 0 \quad \text{und} \\ \dot{y}(0) = \dot{z}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Führen Sie die Abkürzung $\omega_c = {}^{qB_0}/_{mc}$ für die sogenannte Zyklotronfrequenz ein. Die Bewegungsgleichung für y lässt sich zu

$$\dot{y}(t) = \dot{y}(0) + \int_0^t \mathrm{d}t'\ \ddot{y}(t') = -\omega_c \left[x(0) + \int_0^t \mathrm{d}t'\ \dot{x}(t') \right] = -\omega_c x(t)$$

integrieren. Setzen Sie dieses Resultat in die DGL für x ein und lösen Sie diese. Bestimmen Sie anschließend $y(t)$ (vergessen Sie $z(t)$ nicht).

(d) Betrachten Sie nun die Lagrange-Funktion

$$L'(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + \frac{qB_0}{2\mathrm{c}} (x\dot{y} - \dot{x}y).$$

Wie lauten die zu x, y und z kanonisch konjugierten Impulse p_x, p_y und p_z? Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen für x, y und z.

(e) Zeigen Sie, dass

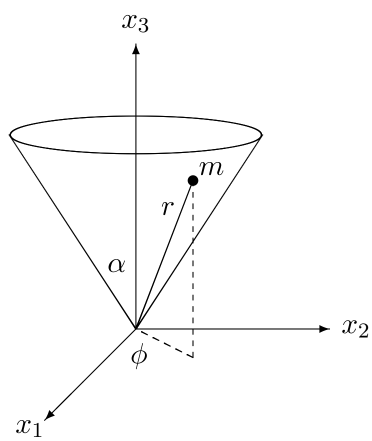
$$L'(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\vec{r})$$

gilt und bestimmen Sie $f(\vec{r})$ explizit.

2. $[1, 2, 2]$ Gegeben sei die Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Potenzial,
$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\Phi(\vec{r}, t) + \frac{q}{\mathrm{c}}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t).$$
   (a) Bestimmen Sie den zu $\vec{r}$ kanonisch konjugierten Impuls $\vec{p}$.
   (b) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion $\tilde{H}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$.
   (c) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion $H(\vec{r}, \vec{p}, t)$.

3. $[2]$ Gegeben sei die Lagrange-Funktion
$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \tfrac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r})$$
eines Teilchens der Masse m. Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion $H(\vec{r}, \vec{p})$ in kartesischen Koordinaten.

4. $[6, 10]$ Ein Teilchen der Masse m gleite reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels mit (zeitunabhängigem) Öffnungswinkel 2α $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$. In negativer x_3-Richtung wirke ein homogenes Gravitationsfeld mit Gravitationskonstante g, normiert auf $V(0) = 0$. Betrachten Sie das Problem in Kugelkoordinaten und verwenden Sie als verallgemeinerte Koordinaten r und ϕ.



   (a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L = L(r, \dot{r}, \phi, \dot{\phi})$ des Teilchens. Welche Koordinate ist zyklisch? Welche Größe ist erhalten? Berechnen Sie mit der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung für r.
   (b) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion $H = H(r, p_r, \phi, p_\phi)$ des Teilchens und berechnen Sie die kanonischen Gleichungen für r und ϕ. Leiten Sie aus diesen die Differenzialgleichung zweiter Ordnung für r ab und zeigen Sie, dass diese mit der in (a) erhaltenen übereinstimmt.