Name:

Gruppe:

Bearbeitungszeit:

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

Theoretische Physik 1 (B. Ed.) – Übung 11

1. [7] Gegeben seien die (3,3)-Matrizen $\mathcal{T}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ mit den Einträgen $\tau_{i,mn} = -\epsilon_{imn}$ in der m-ten Zeile und n-ten Spalte. Verifizieren Sie $[\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j] = \epsilon_{ijk}\mathcal{T}_k$.

   Hinweise: Zwei Matrizen A und B sind gleich, wenn ihre Matrixelemente a_{mn} und b_{mn} gleich sind. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

2. [2, 6, 2, 1] Ein Tensorfeld T zweiter Stufe sei in K durch $t_{ij}(x) := x_i x_j$ definiert.

   (a) Berechnen Sie die Komponenten an einem Punkt P mit den Koordinaten $x_1 = x_2 = 1$ und $x_3 = 0$ in K.

   (b) Wir definieren die Komponenten eines Tensorfeldes U vierter Stufe gemäß

   $$u_{ijkl}(x) := t_{ij}(x)\delta_{kl}.$$

   Bestimmen Sie alle Tensoren zweiter Stufe, die aus der Kontraktion eines Indexpaares entstehen können.

   (c) Betrachten Sie das Tensorfeld V erster Stufe, dessen Komponenten durch $v_i = \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}$ gegeben seien. Berechnen Sie $v_i(x)$ in K.

   (d) Berechnen Sie schließlich das skalare Tensorfeld S, dessen Komponente durch $s = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ gegeben sei.

3. [2, 2] Gegeben sei ein zeitunabhängiges skalares Feld Φ und ein zeitunabhängiges Vektorfeld $\vec{A}$. In K gelte (mit Konstanten $E_0, B_0 > 0$)

   $$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi(x) = -E_0 x_2, \quad A_1(x) = A_3(x) = 0, \quad A_2(x) = B_0 x_1.$$

   (a) Berechnen Sie die Komponenten des statischen elektrischen und magnetischen Feldes im System K,

   $$E_i(x) = -\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i}, \qquad B_i(x) = \epsilon_{ijk}\frac{\partial A_k(x)}{\partial x_j}.$$

(b) Das System K' gehe aus K durch eine Paritätstransformation ($x'_i = -x_i$) hervor. Berechnen Sie die Komponenten $E'_i(x')$ und $B'_i(x')$ bezüglich K'.
Hinweis: Φ ist ein skalares Feld und $\vec{A}$ ein Vektorfeld, d. h. für die Paritätstransformation gilt $\Phi'(x') = \Phi(x)$ und $A'_i(x') = -A_i(x)$. Außerdem gilt für den Epsilontensor $\epsilon'_{ijk} = \epsilon_{ijk}$.

4. [1, 3] Gegeben sei die Transformation

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\lambda & -\sinh\lambda \\ -\sinh\lambda & \cosh\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante der Transformationsmatrix.

(b) Zeigen Sie, dass $c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$.

5. [5, 3] Betrachten Sie die spezielle Lorentz-Transformation $L = L(\beta)$ entlang der x-Achse in zwei Dimensionen, $L(\beta) = \left(\begin{smallmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{smallmatrix}\right)$. Das Koordinatensystem K'' bewege sich mit β_2 relativ zu K', dieses wiederum mit β_1 relativ zu K.

(a) Leiten Sie ein relativistisches Geschwindigkeitsadditionsgesetz für parallele Richtungen her.

(b) Diskutieren Sie die Spezialfälle

i. $|\beta_1|, |\beta_2| \ll 1$,

ii. $|\beta_1| = 1$, $|\beta_2| < 1$,

iii. $|\beta_1| = 1$, $|\beta_2| = 1$.

Interpretieren Sie ihre Ergebnisse.

6. [3] Eine Uhr bewege sich in K zwischen t_1 und $t_2 > t_1$ mit der Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = (-\omega R \sin(\omega t), \omega R \cos(\omega t), 0),$$

wobei $R > 0$, $\omega > 0$ und $\omega R < c$. Berechnen Sie die Eigenzeitdifferenz $\tau_2 - \tau_1$.

7. [3] Nehmen Sie an, dass die Erde ein Inertialsystem sei. Der Abstand zwischen zwei Städten A und B betrage 300 km. Die Uhren an den Bahnhöfen seien synchronisiert. Ein Zug verkehre mit der konstanten Geschwindigkeit 300 km/h von A nach B (Beschleunigungs- und Bremsphase werden vernachlässigt). Um wieviel geht eine (identische) Uhr im Zug bei Ankunft in B im Vergleich zur dortigen Bahnhofsuhr nach, wenn Zuguhr und Bahnhofsuhr in A bei Abfahrt dieselbe Zeit angezeigt haben?
Hinweis: Verwenden Sie $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ sowie $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$.