Name:

Gruppe:

Bearbeitungszeit:

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Theoretische Physik 1 (B. Ed.) – Übung 10

1. [6] Die Poisson-Klammer zweier Funktionen f und g ist definiert durch

$$\{f, g\} := \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right).$$

Verifizieren Sie

$$\{f_1 f_2, g\} = \{f_1, g\} f_2 + f_1 \{f_2, g\}.$$

2. [9] Verifizieren Sie für die Poisson-Klammer der Drehimpulse unter Verwendung der Einstein'schen Summenkonvention

$$\{l_i, l_j\} = -\epsilon_{ijk} l_k.$$

3. [2] Es seien f und g Funktionen, die auschließlich von den verallgemeinerten Koordinaten (und eventuell von der Zeit) abhängen, d. h. $f = f(q,t)$ und $g = g(q,t)$. Zeigen Sie

$$\{f(q,t), g(q,t)\} = 0.$$

Bemerkung: Hängen f und g ausschließlich von den verallgemeinerten Impulsen (und eventuell von der Zeit) ab, gilt ebenso $\{f(p,t), g(p,t)\} = 0$.

4. [1, 8, 1] Gegeben sei die Lagrange-Funktion eines dreidimensionalen, harmonischen Oszillators:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i^2 - \frac{m}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{3} q_i^2 = \frac{m}{2} \dot{q}_i^2 - \frac{m}{2} \omega^2 q_i^2 \quad \text{(Einstein'sche SK)}.$$

   (a) Wie lautet die Hamilton-Funktion $H(q, p)$?

   (b) Betrachten Sie den symmetrischen Tensor T zweiter Stufe mit den Komponenten

$$T_{jk} := p_j p_k + m^2 \omega^2 q_j q_k \quad (j, k = 1, 2, 3).$$

   Zeigen Sie, dass die T_{jk} Erhaltungsgrößen sind.

(c) Drücken Sie die Spur von T, d. h. $\sum_{j=1}^{3} T_{jj} = T_{jj}$ (Einstein'sche SK), durch die Hamilton-Funktion aus.

Bemerkung: Der spurlose Tensor $\overline{T}_{jk} := T_{jk} - \frac{2m}{3} H \delta_{jk}$ besitzt fünf unabhängige Komponenten. Zusammen mit den drei Komponenten l_j des Drehimpulses aus Aufgabe 2. bilden die 8 Größen $\{\overline{T}_{jk}, l_j\}$ gerade die Erzeugenden der Symmetriegruppe SU(3) des dreidimensionalen, harmonischen Oszillators.

5. [9] Gegeben sei eine passive Drehung um die z-Achse mit Drehwinkel φ: $D_3(\varphi)$. Zeigen Sie, dass $D_3(\varphi) = \mathrm{e}^{-B}$, wobei $B = \varphi \mathcal{T}_3$ und

$$\mathcal{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Es gilt } D_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

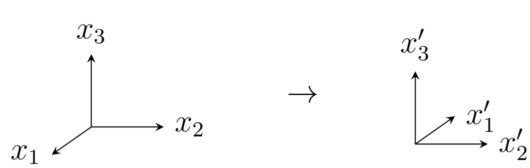
Hinweis: Betrachten Sie die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion einer Matrix A; zerlegen Sie diese Summe in gerade und ungerade Anteile (beachten Sie hierbei, dass $A^0 = \mathbb{1}$). Bestimmen Sie $\mathcal{T}_3^{2k}$ und $\mathcal{T}_3^{2k+1}$ und verwenden Sie schließlich die Reihenentwicklungen für cos und sin.

6. [1, 1, 2] Gegeben sei ein rechtshändiges Koordinatensystem K mit Orthonormalbasis (ONB) $\mathcal{B} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$.

(a) Wie lautet die Matrix S, die den Übergang zu einem linkshändigen Koordinatensystem K' mit ONB $\mathcal{B}' = \{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\} = \{-\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ vermittelt?

(b) Die Matrix S lässt sich als Produkt aus einer eigentlichen Drehung D und der Parität $P = -\mathbb{1}$ schreiben, $S = PD$. Bestimmen Sie D.

(c) Der durch S beschriebene Übergang von K zu K' lässt sich folgendermaßen graphisch darstellen:



Skizzieren Sie in Analogie den durch PD beschriebenen Übergang von $K \to K'' \to K'$. (K'' entsteht durch die Transformation D.)