Übungsblatt 9
Theoretische Physik 3 : QM SS2018
Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

20.06.2017

Übung 0.

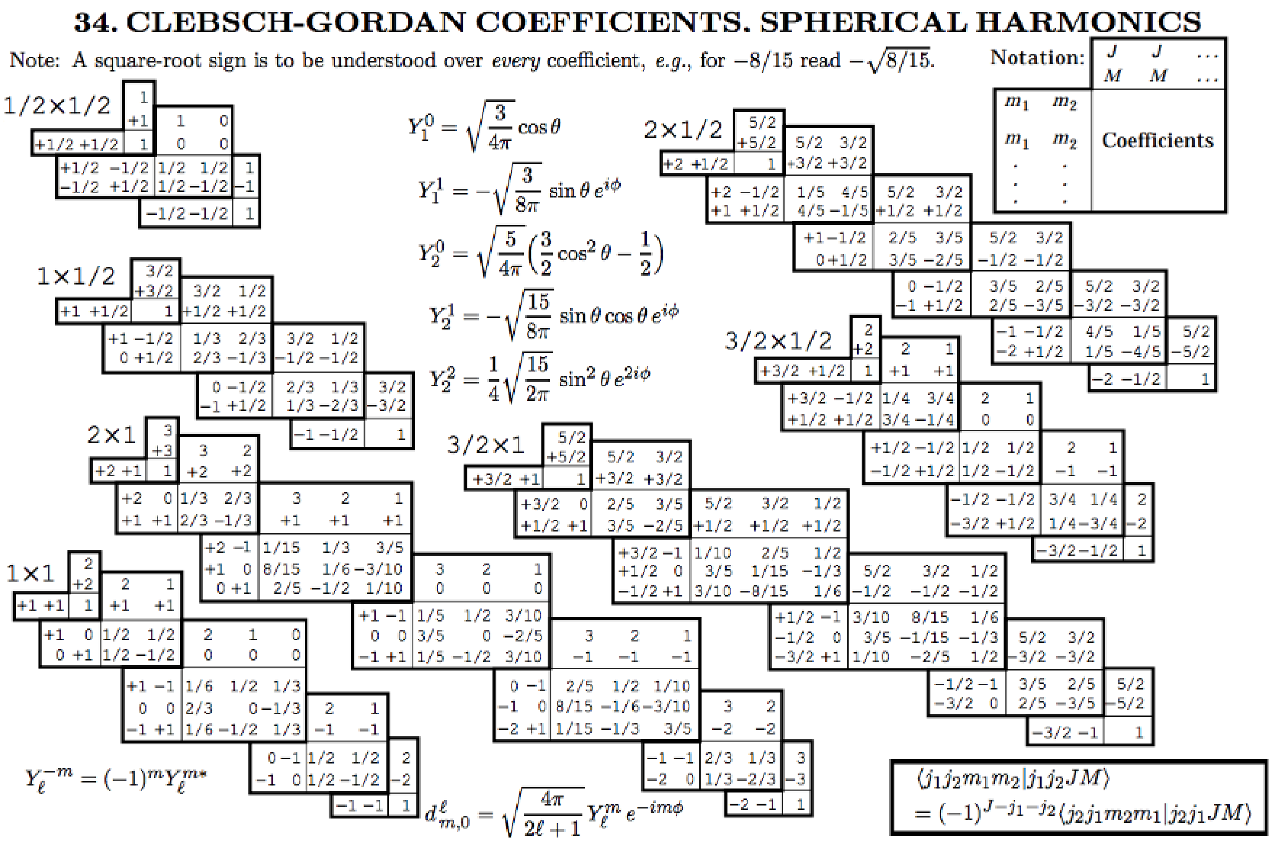
Wie viel Zeit hat es gebraucht, um die Aufgaben zu erledigen?

Übung 1. (40 Punkte)

In dieser ersten Übung werden wir üben, mit Hilfe von Clebsch-Gordan-Tabellen zwei Drehimpulse j_1 und j_2 zu koppeln. Es sei daran erinnert, dass die gekoppelten Zustände, die durch den Gesamtdrehimpuls J und seine Projektion M charakterisiert sind, über die Vollständigkeitsrelation in der entkoppelten Basis erweitert werden können:

$$|JM\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM\rangle.$$

Die Expansionskoeffizienten, $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM\rangle$, sind die Clebsch-Gordan-Koeffizienten, die in der folgenden Tabelle zu finden sind:



a) *(25 p.)* Notiere alle mögliche Zustände $|JM\rangle$ in der Basis $|j_1 m_1\rangle\,|j_2 m_2\rangle$ für die zusammengesetzten Systeme $\frac{1}{2}\otimes 1$ and $1\otimes 1$ (Das Symbol $\otimes$ steht für die Kopplung von zwei Drehimpulsen).

b) *(15 p.)* Überprüfe explizit, dass die Zerlegungen der Zustände $|\frac{5}{2},+\frac{1}{2}\rangle$ in der Basis $|\frac{1}{2}m_1\rangle\,|1m_2\rangle\,|1m_3\rangle$ die man für $(\frac{1}{2}\otimes 1)\otimes 1$ und $\frac{1}{2}\otimes(1\otimes 1)$ erhält, die gleichen sind.

Übung 2. (30 Punkte)

Nimm ein allgeminen Spin-1/2 Zustand (also mit $|a|^2+|b|^2=1$)

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

a) *(10 p.)* Zeige, dass es immer eine Raumrichtung $\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ gibt, in der χ der Eigenzustand der Spin-Komponente entlang dieser Richtung ist. $S_{\vec{n}} = \vec{n}\cdot\vec{S}$ mit Eigenwert $\hbar/2$.

b) *(15 p.)* Drücke θ und ϕ durch a und b aus.

c) *(5 p.)* Ist ein analoges Ergebnis auch für höhere Spin-Zustände zu erwarten?

Hinweis: Zähle die Freiheitsgrade.

Übung 3. (30 Punkte)

a) *(15 p.)* Bestimme die Spin-Matrizen S_x, S_y, S_z in der Basis $|s, s_z\rangle$ für $s=1$.

b) *(15 p.)* Finde die Eigenwerte und normiere die Eigenvektoren von S_x und S_y in dieser Basis.

Hinweis: Die Beziehung $S_\pm|s,s_z\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1)-s_z(s_z\pm 1)}|s,s_z\pm 1\rangle$ könnte nützlich sein.