

Übungsblatt 6  
Theoretische Physik 3 : QM SS2018  
Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

06.06.2018

### Übung 0.

Wie viel Zeit hat es gebraucht, um die Aufgaben zu erledigen?

### Übung 1. (20 Punkte)

a) (15 p.) Zeige, dass der Laplace-Operator  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  in drei Dimensionen die Form

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

annimmt.

b) (5 p.) Zeige, dass der radiale Ausdruck geschrieben werden kann als

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r.$$

### Übung 2. (45 Punkte)

a) (15 p.) Zeige, dass  $L_{\pm} Y_l^m = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_l^{m \pm 1}$ .  
*Tipp:* Beachte die Norm von  $L_{\pm} Y_l^m$ .

b) (15 p.) Zeige das für Eigenfunktionen von  $\hat{L}_z$ , folgendes gilt

$$\langle \hat{L}_x \rangle = \langle \hat{L}_y \rangle = 0, \quad \langle \hat{L}_x^2 \rangle = \langle \hat{L}_y^2 \rangle \quad \text{und} \quad \langle \hat{L}_x \hat{L}_y + \hat{L}_y \hat{L}_x \rangle = 0.$$

*Tipp:* Betrachte  $\langle \hat{L}_{\pm} \rangle$  und  $\langle \hat{L}_{\pm}^2 \rangle$ .

c) (15 p.) Im Zustand  $\psi_{lm}$  mit bestimmtem Drehimpuls  $l$  und dessen  $z$ -Komponente  $m$ , finde die Mittelwerte  $\langle \hat{L}_x^2 \rangle$ ,  $\langle \hat{L}_y^2 \rangle$  sowie die Mittelwerte  $\langle \hat{L}_z \rangle$  und  $\langle \hat{L}_z^2 \rangle$  in Richtung von  $\hat{z}$ -Achse welche einen Winkel von  $\alpha$  mit der  $z$ -Achse einschließt.

*Tipp:* Benutze  $\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = \hat{L}^2$ .

### Übung 3. (35 Punkte)

a) (20 p.) Beweise das für ein Teilchen in einem Potential  $V(\vec{r})$  die Änderungsrate des Erwartungswertes des Bahndrehimpulses  $\vec{L}$  gleich dem Erwartungswert des Drehmoments ist. (Rotation analog zu Ehrenfests Theorem)

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{L} \rangle = \langle \vec{N} \rangle \quad \text{where} \quad \vec{N} = \vec{r} \times (-\vec{\nabla} V).$$

Zeige, dass  $\langle \vec{L} \rangle$  für jedes sphärisch symmetrische Potential konstant ist. (Dies ist eine Form der Erhaltung des Drehimpulses in der Quantenmechanik.)

- b) (15 p.) Zeige dass die Mittelwerte der Vektoren  $\vec{L}$ ,  $\vec{r}$ ,  $\vec{p}$  für den Partikelzustand mit der Wellenfunktion  $\psi = \exp(i\vec{p}_0 \cdot \vec{r}/\hbar)\phi(\vec{r})$  durch die klassische Beziehung  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  gegeben ist. Hier ist  $p_0$  ein reeller Vektor und  $\phi(\vec{r})$  ist eine reelle Funktion.

#### Übung 4. (*Bonus* 15 points)

Verifiziere oder falsifiziere folgende Aussagen:

- a) (10 p.) Wenn  $[\hat{H}, \hat{L}] = \vec{0}$ , dann hängen die Energieniveaus nicht von  $m$  ab (d.h. die Eigenwerten der Projektion einer der Komponenten des Drehimpulses  $\hat{L}$ ).
- b) (5 p.) Wenn  $[\hat{H}, \hat{L}^2] = 0$ , hängen die Energieniveaus nicht von  $l$  ab.