Übungsblatt 5
Theoretische Physik 3 : QM SS2018
Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

23.05.2018

Übung 0.

Wie viel Zeit hat es gebraucht, um die Aufgaben zu erledigen?

Übung 1. Endlicher quadratischer Potentialtopf (20 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einem endlichen quadratischen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2a} & \text{for } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{for } x > |a| \end{cases} .$$

Die Energielevel sind durch folgende Bedingung gegeben:

$$z \tan z = \sqrt{z_0^2 - z^2}$$

wobei

$$z = \frac{a}{\hbar}\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{2a}\right)}, \qquad z_0 = \frac{a}{\hbar}\sqrt{\frac{m\alpha}{a}}.$$

a) *(10 p.)* Betrachte das Limit $a \to 0$ und nimm an, E sei in diesem endlich. Zeige, dass du den eindeutigen gebundenen Zustand des δ-Potentials $E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$ erhältst.

b) *(10 p.)* Was muss der Wert von $m\alpha a/\hbar^2$ sein, damit das System exakt n gebundene Zustände hat?

Übung 2. (40 + 20 Punkte)

Betrachte die Schrödingergleichung mit dem folgenden Potential:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x < a \\ V_1 & x > a. \end{cases}$$

a) *(10 p.)* Betrachte gebundene Zustände des Systems ($E < 0$). Leite die transzendente(n) Gleichung(en) für die Energie-Quantenzahl her. Beachte, dass im Fall $V_1 = 0$ die Ausdrücke der endlichen Potentialwand aus der Vorlesung erhalten werden sollten.

b) *(10 p.)* Schreibe die Eigenfunktionen für den Hamiltonoperator im Fall $0 < E < V_1$.
Skizziere eine Eigenfunktion für einen mittleren Wert von E.

c) *(5 p.)* Zeige, dass im Limit $V_1 \to +\infty$ die Eigenfunktionen des Hamiltonoperators für $x > a$ verschwinden.
Stimmt es, dass nicht nur die Eigenfunktionen des Hamiltonoperators, sondern *alle* alle Wellenfunktionen für $x > a$ verschwinden müssen?

d) *(15 p.)* Betrachte die gestreuten Zustände für den Fall $E > V_1$. Leite Ausdrücke für die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten her.

e) *(10 p.)(Bonus)* Betrachte das Limit $V_1 \to +\infty$. Beweise, dass das System keine gebundenen Zustände zulässt genau dann wenn $V_0 \leq \pi^2\hbar^2/(8ma^2)$.

f) *(10 p.)(Bonus)* Nimm an, dass das System im Limit $V_1 \to +\infty$ keine gebundenen Zustände erlaubt ($\sqrt{2mV_0a^2/\hbar^2} < \pi/2$), während es bekannt ist, dass für $V_1 = 0$ immer mindestens ein Zustand zugelassen wird. Bestimme $\bar{V_1}$ so, dass das System für $V_1 < \bar{V_1}$ mindestens einen gebundenen Zustand zulässt.

Übung 3. (20 Punkte)

Betrachte einen eindimensionalen unendlichen Kristall. In erster Näherung kann dieser durch eine Reihe Ionen in festen Abständen a dargestellt werden. Wir interessieren uns für die Elektron-Energielevel in diesem Kristall. Ein Elektron sieht ein periodisches Potential, welches von der Ionen-Reihe erzeugt wird. Für ein periodisches Potential $V(x+a) = V(x)$, sagt uns Bloch's Theorem, dass die Lösung der Schrödingergleichung folgende Bedingung erfüllt:

$$\Psi(x+a) = e^{iKa}\Psi(x).$$

Dies bedeuter, dass wir die Schrödingergleichung nur für$0 \leq x \leq a$ lösen müssen, *also* in einer Zelle des Kristalls. Die Wellenfunktion außerhalb dieser Zelle wird durchs Bloch'sche Theorem gegeben. Was nun noch festgelegt werden muss, ist die Randbedingung. Üblicherweise verwendet man die periodische Randbedingung, für welche eine große, aber endliche Anzahl Ionen N betrachtet wird und man zusätzlich fordert

$$\Psi(x+Na) = \Psi(x).$$

Im Limit von unendlich vielen Ionen $N \to \infty$, erhalten wir den unendlichen Kristall.

a) *(5 p.)* Benutze das Bloch'sche Theorem and die periodische Randbedingung, um die erlaubten Werte für K herzuleiten. Was passiert im Limit $N \to \infty$?

b) *(15 p.)* Betrachte als, von den Elektronen wahrgenommenes Potential, den sogenannten Dirac-Kamm

$$V(x) = \alpha \sum_{j=0}^{N-1} \delta(x - ja),$$

wobei a eine reelle Konstante ist. Löse die Schrödingergleichung für $0 \leq x \leq a$ und zeige, dass die erlaubten Werte der Energie E durch folgende Bedingung festgelegt sind:

$$\cos Ka = \cos ka + \frac{m\alpha}{\hbar^2 k}\sin ka, \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

Zeige, dass die Energielevel für genügend große N in Bändern angeordnet sind.

Übung 4. Matrizen: Eigenwerte und Eigenvektoren. (20 Punkte)

a) *(5 p.)* Betrachte die drei Pauli-Matrizen:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Berechne σ_x^2, σ_y^2, σ_z^2, sowie die Kommutatoren $[\sigma_x, \sigma_y]$, $[\sigma_y, \sigma_z]$, $[\sigma_z, \sigma_x]$.

b) *(5 p.)* Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von σ_x, σ_y and σ_z.

c) *(5 p.)* Berechne ebenso die Eigenwerte und Eigenvektoren der 2D- and hyperbolischen Drehungsmatrizen:

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{bmatrix}.$$

d) *(5 p.)* Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden 3×3 Matrizen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$