# Übungsblatt 4
# Theoretische Physik 3 : QM SS2018
# Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

16.05.2018

**Übung 0.**

Wie viel Zeit hat es gebraucht, um die Aufgaben zu erledigen?

## Übung 1. Fourier Transformation. (15 points)

Berechnen Sie die Fourier-Transformationen der folgenden Gleichungen anhand der Definition in der Vorlesung

a) *(2 p.)* $f(x) = \delta(x)$ und $f(x) = \delta(x - x_0)$

b) *(2 p.)* $f(x) = a = \text{const}$

c) *(4 p.)* $f(x) = \cos(x)$

d) *(7 p.)* $f(x) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

## Übung 2. doppeltes $\delta$-Potential. (45 points)

Betrachten Sie das folgende eindimensionale Modellpotential für ein Molekül mit einem doppelt entarteten Zustand:

$$V(x) = -V_0 a \left(\delta(x-a) + \delta(x+a)\right),$$

wobei $V_0$ und $a$ reele Parameter sind.

a) *(5 p.)* Wenden Sie eine Fouriertransformation auf die dazugehörige Schrödinger Gleichung an, $\hat{H}(x)\psi(x) = E\psi(x)$. Zeigen Sie, dass dies im Impulsraum folgendermaßen aussieht

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\phi(k) - \frac{V_0 a}{\sqrt{2\pi}}\left(\psi(a)e^{-ika} + \psi(-a)e^{ika}\right) = E\phi(k),$$

wobei

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-ikx}\psi(x) \quad \text{und} \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, e^{ikx}\phi(k).$$

*Tipp*: Nutzen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x e^{ax} = \frac{\partial}{\partial a}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{ax}$

b) *(10 p.)* Unter Verwendung der erhaltenen Schröder-Gleichung im Impulsraum finden Sie die gebundenen Zustände des Systems im Koordinatenraum. Wie viele gebundene Zustände hat das System? *Tipp*: Die Lösung muss an den Punkten $x = \pm a$ konsistent sein.

c) *(10 p.)* Für $V_0 a = \frac{\hbar^2}{ma}$, finden Sie die Energien der stationären Zustände. Skizzieren Sie die entsprechenden Wellenfunktionen.
*Tipp*: Nutzen Sie die Tatsache, dass es gerade und ungerade Lösungen gibt.

d) *(5 p.)* Diskutieren Sie die Rolle des Parameters $a$ für die stationären Zustände (betrachten Sie $a \to 0$ und $a \to \infty$).

e) *(15 p.)* Finden Sie die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für einen Strahl von Teilchen in diesem Potential.

## Exercise 3. Matrizen. (40 points)

Erinnern Sie sich, dass die Matrixmultiplikation eine nichtkommutative Operation ist. Wir definieren den Kommutator zweier Matrizen $A$ und $B$ als $[A, B] = AB - BA$.

a) *(10 p.)* Beweisen Sie die folgenden Identitäten für beliebige Matrizen $A$, $B$ und $C$:

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C],$$
$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

b) *(10 p.)* Betrachte einen speziellen Fall, wenn $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$.
Beweisen Sie durch Induktion, dass

$$[A, B^n] = [A, B]nB^{n-1}.$$

c) *(10 p.)* Wir definieren eine Funktion einer Matrixvariablen $f(A)$ durch die Maclaurin-Reihenentwicklung (vorausgesetzt, es ist möglich):

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n.$$

Im Fall $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ zeigen Sie, dass

$$[A, F(B)] = [A, B]F'(B),$$

Wobei $F'$ die Funktion ist, die durch Differenzierung von $F$ erhalten wird.

d) *(10 p.)* Betrachten Sie den gleichen Fall $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ und beweise die Glauber-Formel

$$e^A \, e^B = e^{A+B} \, e^{\frac{1}{2}[A,B]}.$$

*Tipp*: Betrachten Sie die Funktion $F(t) = e^{tA} \, e^{tB}$. Zeigen Sie, dass es die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = (A + B + t[A, B])F(t)$ erfüllen muss. Dann lösen Sie die Gleichung, indem Sie feststellen, dass $(A + B)$ und $[A, B]$ pendeln und daher als bloße Zahlen behandelt werden können.

## (*Bonus*) Übung 4. (30 points)

Während der Vorlesung haben Sie gelernt, dass ein freies Teilchen durch das folgende Wellenpaket beschrieben werden kann

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \, \phi(k) e^{i(kx - \hbar k^2 t/(2m))}.$$

Wie gezeigt wurde, bewegt sich ein Wellenpaket, wenn $k$ eng um $k_0$ verteilt ist, gleichmäßig mit einer sogenannten Gruppengeschwindigkeit $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega_k}{\mathrm{d}k}$, die mit dem klassischen Wert übereinstimmt.

Lassen Sie uns für einen Moment so tun, als wären wir Physiker, die vor vielen Jahren gelebt haben, und wir sind uns nicht sicher über die physikalische Bedeutung von $\|\psi(x, t)\|^2$. Das erhaltene

Ergebnis liefert eine Hypothese, dass eine Gruppe von de Broglie-Wellen ein Teilchen bildet. Auf diese Weise ist es unser Ziel zu überprüfen, ob $\|\psi(x,t)\|^2$ als die Massendichte eines Partikels interpretiert werden kann. Um diese Frage zu beantworten, sollen Sie folgende Aufgaben lösen.

Betrachten Sie ein Wellenpaket mit

$$\phi(k) = Ce^{-(k-k_0)^2/(4\Delta^2)},$$

wobei $C$ der Normalisierungsfaktor ist.

a) *(10 p.)* Nach einer Integration zeigen Sie, dass

$$\psi(x,t) \propto e^{ik_0x - i\omega_{k_0}t}\sqrt{\frac{4\pi\Delta^2}{1+i2\hbar\Delta^2 t/m}}\exp\left[-\frac{\Delta^2(x-v_g t)^2}{1+i2\hbar\Delta^2 t/m}\right]$$

*Tipp*: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{b^2/(4a)}$, $\mathrm{Re}\, a > 0$.

b) *(10 p.)* Verwenden Sie die Eigenschaften komplexer Zahlen und schreiben Sie die erhaltene Wellenfunktion in der Form

$$\psi(x,t) = e^{ik_0x - i\omega_{k_0}t}e^{i(\alpha-\phi/2)}\frac{\exp\left[-\frac{(x-v_g t)^2}{4\langle\Delta x^2\rangle}\right]}{(2\pi\langle\Delta x^2\rangle)^{1/4}}, \quad \text{where} \quad \langle\Delta x^2\rangle = \frac{1}{4\Delta^2}\left[1+\left(\frac{2\hbar\Delta^2 t}{m}\right)^2\right]$$

und $\phi = \arctan(2\hbar\Delta^2 t/m)$.

c) *(5 p.)* Angenommen, bei $t=0$ ist ein Elektron in einem Bereich $\sqrt{\langle\Delta x^2\rangle} \sim 1$Å lokalisiert. Schätzen Sie den Lokalisierungsbereich nach einer Sekunde.

d) *(5 p.)* Kann $\|\psi(x,t)\|^2$ als Massendichte eines Teilchens interpretiert werden? Warum?