Übungsblatt 2
Theoretische Physik 3 : QM SS2018
Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

02.05.2018

Das Ziel dieses Übungsblattes ist es, die zeitliche Entwicklung von Teilchen zu untersuchen, die ursprünglich in einem unendlichen quadratischen Potentialtopf der Breite a "lebten",

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad 0 \leq x \leq a \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{1}$$

nachdem eine instantane Verschiebung zum Zeitpunkt $t = 0$ die linken Grenze des Potentials um a nach links stattgefunden hat. Das Potential lautet dann

$$\tilde{V}(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad -a \leq x \leq a \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

und die anfänglichen Wellenfunktionen sind nun keine stationären Zustände für $t > 0$ mehr. Die ïnstantane Verschiebungïmpliziert, dass sie den Zustand des Teilchens, der vor und unmittelbar nach der Verschiebung gleich ist, nicht beeinflusst.

Das System innerhalb des Potentials $V(x)$ wurde während der Vorlesung untersucht und die stationären Zuständen

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

mit den entsprechenden Energien

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2$$

wurden gefunden.

Aufgabe 0.

Wie viel Zeit hat es gedauert, um die Aufgabe zu erledigen?

Aufgabe 1. (40 Punkte)

Wir sollten damit beginnen, die stationären Zustände $\tilde{\Psi}_n(x)$ innerhalb der potentiellen $\tilde{V}(x)$ zu untersuchen.

a) Ausgehend von der stationären Schrödinger-Gleichung finden Sie das Energiespektrum des Systems, $\tilde{E}_n$.
Wie könnte man die erhaltenen Ergebnisse mit dem Spektrum E_n erraten?
Abgesehen von der Schrödinger-Gleichung selbst, welche Bedingungen bestimmen das Spektrum?

b) Zeigen Sie, dass die Menge der stationären Zustände aus (räumlich) geraden und ungeraden Wellenfunktionen besteht:

$$\tilde{\Psi}_n^{\text{even}}(x) \propto \cos\left(\frac{\pi n x}{2a}\right), \quad n = 1, 3, \ldots$$
$$\tilde{\Psi}_n^{\text{odd}}(x) \propto \sin\left(\frac{\pi n x}{2a}\right), \quad n = 2, 4, \ldots,$$

welche kombiniert werden können:

$$\tilde{\Psi}_n(x) \propto \sin\left(\frac{\pi n}{2a}(x+a)\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Normalisieren Sie dieses Ergebnis.

Aufgabe 2. (60 Punkte)

Die erhaltene Menge von stationären Zuständen $\tilde{\Psi}_n(x)$ bildet eine vollständige Basis innerhalb des linearen Raumes, der durch das Potential $\tilde{V}(x)$ aufgespannt wird. Als Ergebnis kann jede Funktion in diesem Raum als lineare Kombination von $\tilde{\Psi}_n(x)$ geschrieben werden. Wir werden diese Tatsache auf die anfänglichen Wellenfunktionen $\Psi_n(x)$ anwenden.

a) Angenommen, jeder Anfangszustand wird entwickelt als

$$\Psi_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^m \tilde{\Psi}_n(x)$$

Bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten c_n^m.
Tipp: Ist $\sin(\pi n)/(n^2 - m^2)$ gleich 0 für alle $n, m \in \mathbb{Z}$?

b) Zu Zeiten $t > 0$ können die entsprechenden zeitabhängigen Wellenfunktionen gefunden werden

$$\Psi_m(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^m \tilde{\Psi}_n(x,t).$$

Überprüfen Sie, ob die Normalisierung mit der Zeit anhält.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P_n^m, um das Teilchen zu finden, das ursprünglich die Energie E_m im $\tilde{\Psi}_n(x)$ Eigenzustand des neuen Systems hatte für $t > 0$.
Bestimme P_2^1.

c) Wann wird die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen in der rechten Hälfte der Vertiefung ($0 \le x \le a$) zu finden, Null?

d) Betrachte ein Teilchen, das sich ursprünglich im Grundzustand $\Psi_1(x)$ befand.
Berechne den Erwartungswert der Energie zu jedem Zeitpunkt $t > 0$.
Was bedeutet dieses Ergebnis?
Tipp: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{(2n+1)^2-4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16}$

(*Bonus*) Aufgabe 3. (20 Punkte)

Ein Teilchen innerhalb des unendlichen Potentialtopfes besitzt als Anfangswellenfunktion eine gleichmäßige Mischung des ersten und zweiten angeregten stationären Zustandes:

$$\Psi(x,0) = A\,(\,\Psi_2(x) \,+\, \Psi_3(x))\;.$$

Beachte, dass Ψ_2 die räumlich ungerade Wellenfunktion des ersten angeregten Zustands des Systems ($n = 2$) ist. Ψ_3 ist dagegen die räumlich gerade Wellenfunktion des zweiten angeregten Zustands ($n = 3$).

a) Normiere $\Psi(x, 0)$.

b) Bestimme $\Psi(x, t)$ und $|\Psi(x, t)|^2$. Definiere $\omega \equiv \pi^2 \hbar / 2ma^2$ um das Ergebnis zu vereinfachen. Überprüfe die Zeitunabhängigkeit der Normierung.

c) Berechne die Zeitentwicklung von $\langle x \rangle$.
Was sind Frequenz und Amplitude seiner Oszillation?
Bestimme $\langle p \rangle$ aus $\langle p \rangle = m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \langle x \rangle$.

d) Bestimme den Erwartungswert von H. Wie verhält sich dieser im Vergleich zu E_2 und E_3?