Name:

Gruppe:

Bearbeitungszeit:

1	2	3	4	$\sum$

Theoretische Physik 1 (B. Ed.) – Übung 8

1. [7] Gegeben sei ein System von n Massenpunkten ($i = 1, \ldots, n$) mit den Massen m_i und den Koordinaten $\vec{r}_i$, das r holonomen Zwangsbedingungen unterworfen sei:

$$f_\lambda(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n, t) = 0, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, r < 3n.$$

Die $\vec{r}_i$ lassen sich als (unter Umständen explizit zeitabhängige) Funktionen von f generalisierten Koordinaten schreiben:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_f, t), \quad f = 3n - r.$$

Zeigen Sie, dass die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

sich in der Form

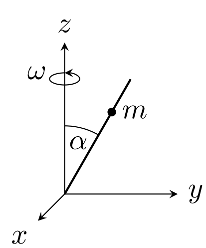
$$T(q, \dot{q}, t) = a + \sum_{k=1}^{f} b_k \dot{q}_k + \sum_{k,l=1}^{f} c_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l$$

schreiben lässt. Bestimmen Sie die Funktionen a, b_k und c_{kl}.

Hinweis:

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}.$$

2. [2, 2, 3, 2]



An einer Achse, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, ist unter dem Winkel α ein gerader Draht befestigt, auf dem eine Masse m reibungsfrei gleitet (der Draht dreht sich laut Skizze, in dieser Aufgabe keine Schwerkraft!).

(a) Betrachten Sie das System in Kugelkoordinaten. Wie lauten die Zwangsbedingungen für θ und ϕ? Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf.

(b) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für r her.

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $r(0) = R$ und $\dot{r}(0) = 0$.
Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $r(t) = A\mathrm{e}^{-at} + B\mathrm{e}^{at}$. Geben Sie a explizit an.

(d) Wie lautet die Energie $E = E(t)$ für die Anfangsbedingungen aus (c) als Funktion der Zeit?

3. [3, 3, 3] Betrachten Sie die drei Bahnen

$$z_1(t) = at, \quad z_2(t) = bt^2 \quad \text{und} \quad z_3(t) = ct^3$$

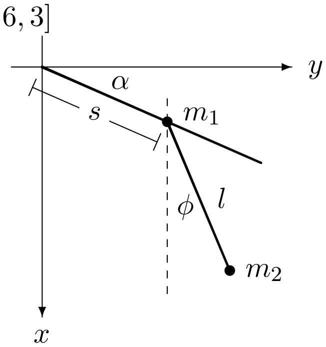
im konstanten Schwerefeld $\vec{F} = -mg\hat{e}_z$ der Erde.

(a) Bestimmen Sie die Konstanten a, b und c so, dass für jede Bahn $(i = 1, 2, 3)$ die Randbedingungen $z_i(t_1 = 0) = 0$ und $z_i(t_2) = -\frac{g}{2}t_2^2$ erfüllt sind.

(b) Schreiben Sie die Lagrange-Funktionen für die drei Bahnen explizit als Funktionen der Zeit.

(c) Bestimmen Sie jeweils den Wert des Wirkungsintegrals für die drei Bahnen und diskutieren Sie, welche Bahnen aufgrund des Prinzips der kleinsten Wirkung ausgeschlossen werden können.

4. [2, 4, 6, 3]



Ein Teilchen der Masse m_1 gleite reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft entlang einer Geraden, die den Winkel α mit der Horizontalen bildet. An dem Teilchen sei die Masse m_2 mittels eines gewichtslosen Fadens der Länge l befestigt.

(a) Drücken Sie die kartesischen Koordinaten x_1 und x_2 bzw. y_1 und y_2 durch die generalisierten Koordinaten s und ϕ aus.

(b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(s, \phi, \dot{s}, \dot{\phi})$ auf.

(c) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für s und ϕ.

(d) Nehmen Sie an, dass eine Lösung mit konstantem $\phi = \phi_0$ existiert. Was impliziert dies für $\dot{\phi}$ und $\ddot{\phi}$? Bestimmen Sie für diesen Winkel die allgemeine Lösung für $s(t)$. Setzen Sie nun $\ddot{s}$ in die DGL für ϕ ein und bestimmen Sie ϕ_0.