Name:

Gruppe:

Bearbeitungszeit:

1	2	3	4	$\sum$

Theoretische Physik 1 (B. Ed.) – Übung 7

1. $[1, 2, 1, 2]$ Gegeben sei ein Erdsatellit, dessen Masse m sehr viel kleiner als die Masse $M_\oplus$ der Erde ist.

   (a) Wie lautet das effektive Potenzial für eine Satellitenbahn?

   (b) Betrachten Sie nun eine Kreisbahn mit Radius $\rho_0 = {}^{\ell^2}/_{m\alpha}$. Bestimmen Sie ρ_0 als Funktion der Kreisfrequenz ω.

   Hinweis: Drücken Sie den Drehimpuls durch ρ_0 und ω aus.

   (c) Berechnen Sie den Radius des Orbits eines geostationären Satelliten.

   Hinweis: $M_\oplus = 6.0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $G = 6.7 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$.

   (d) Muss die Bahn eines Erdsatelliten eine Kreisbahn sein? (Begründen Sie.)

2. $[3, 2, 2, 4]$ Wir betrachten den freien Fall eines Teilchens der Masse $m \ll M_E$ im Gravitationspotenzial der Erde mit

$$\dot\rho = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\Big[E - U_{\text{eff}}(\rho)\Big]}, \quad U(\rho) = -\frac{mM_E G}{\rho}, \quad M_E G = gR_E^2,$$

   für den Spezialfall $\ell = 0$. Gegeben sei ein Abstand $R > R_E$ und es sei $R_E \leq \rho < R$. Im Folgenden verstehen wir unter Geschwindigkeit den Betrag $|\dot\rho\,|$.

   (a) Das Teilchen sei im Abstand R in Ruhe. Wie groß ist seine Energie E? Bestimmen Sie nun die Geschwindigkeit des Teilchens im Abstand ρ. Drücken Sie das Resultat durch g, R_E, ρ und R aus.

   (b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, mit der das Teilchen auf der Erdoberfläche aufschlägt, wenn es im Unendlichen die Geschwindigkeit Null hatte. Drücken Sie das Resultat durch g und R_E aus.

   (c) Aus welcher Höhe in Relation zur Erdoberfläche müsste ein anfänglich ruhendes Teilchen bei konstanter Schwerebeschleunigung g fallen, um auf der Erdoberfläche dieselbe Geschwindigkeit zu erreichen?

(d) Es sei $R = R_E + h$ mit $h \ll R_E$. Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und einer Taylor-Reihenentwicklung in h/R_E, dass die Geschwindigkeit des Teilchens beim Aufschlag auf der Erdoberfläche gegeben ist durch

$$|\dot{\rho}(R_E)| = \sqrt{2gh}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{h}{R_E} + \cdots\right).$$

3. [5, 4] Gegeben sei ein System aus drei Punktteilchen der Masse m mit Koordinaten $\vec{r}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Wir führen die so genannten Jacobi-Koordinaten

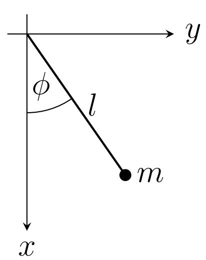
$$\vec{R} = \frac{1}{3}\left(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3\right), \quad \vec{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right), \quad \vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3\right)$$

ein.

(a) Drücken Sie $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ und $\vec{r}_3$ jeweils durch $\vec{R}$, $\vec{\rho}$ und $\vec{\lambda}$ aus.

(b) Drücken Sie nun die kinetische Energie $T = \frac{m}{2}\left(\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \dot{\vec{r}}_2^{\,2} + \dot{\vec{r}}_3^{\,2}\right)$ mit Hilfe von $\dot{\vec{R}}$, $\dot{\vec{\rho}}$ und $\dot{\vec{\lambda}}$ aus.

4. [4, 2, 2, 4, 2] Gegeben sei ein mathematisches Pendel der Länge l mit Masse m im Gravitationsfeld der Erde, $\vec{F} = mg\hat{e}_x$.



(a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion in ebenen Polarkoordinaten. Normieren Sie das Potenzial auf $V(\phi = 0) = 0$.

(b) Leiten Sie aus der Lagrange-Funktion die Bewegungsgleichung her.

(c) Wie lautet die Bewegungsgleichung für $|\phi| \ll 1$? (Betrachten Sie nur den führenden Term.)

(d) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen mit den Anfangsbedingungen

i. $\phi(0) = 0$ und $\dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0$,

ii. $\phi(0) = \phi_0$ und $\dot{\phi}(0) = 0$.

(e) Berechnen Sie die Periode T einer Schwingung.