Name:

Gruppe:

Bearbeitungszeit:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|

**Theoretische Physik 1 (B. Ed.) – Übung 6**

1. [3, 2, 3] Gegeben sei ein System aus zwei Punktteilchen der Massen $m_1$ und $m_2$ mit Schwerpunkt- und Relativkoordinaten $\vec{R}$ und $\vec{r}$. Wir betrachten das Oszillatorpotenzial $U(r) = \alpha r^2$ mit $\alpha = \mu\omega^2/2 > 0$, der reduzierten Masse $\mu$, $r = |\vec{r}|$ und $\omega > 0$.

   (a) Wie lautet die Bewegungsgleichung für die Relativbewegung? Lösen Sie diese für die Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ und $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0$.

   (b) Begründen Sie mithilfe einer Skizze, welche Arten von Bahnkurven existieren können (verbotene, gebundene, ungebundene Bahnkurven). Kennzeichnen Sie die entsprechenden Bereiche in der Skizze.

   Betrachten Sie nun das effektive Potenzial

   $$U_{\text{eff}}(\rho) = \alpha\rho^2 + \frac{\ell^2}{2\mu\rho^2} \quad \text{mit Drehimpuls } \ell > 0.$$

   (c) Bestimmen Sie den Abstand $\rho_0$, für den $U_{\text{eff}}$ minimal ist und berechnen Sie den Wert dieses Minimums ($U_{\text{eff}}(\rho_0) = U_{\text{eff}}^{\text{min}}$).

2. [1, 2, 2, 1] Ein Massenpunkt bewege sich auf der Ellipse $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)^T$ mit

   $$x(t) = a\cos(\omega t), \quad y(t) = b\sin(\omega t), \quad z(t) = 0,$$

   wobei $a$, $b$ und $\omega$ positive reelle Konstanten sind.

   (a) Wie groß ist die Periodendauer $T$ für einen Umlauf?

   (b) Geben Sie die kartesischen Komponenten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung an.

   (c) Die Flächengeschwindigkeit ist definiert durch $\dot{\vec{F}} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$. Dabei gibt $|\dot{\vec{F}}|\mathrm{d}t$ die vom Radiusvektor $\vec{r}$ im infinitesimalen Zeitintervall $\mathrm{d}t$ überstrichene Fläche an. Bestimmen Sie $\dot{\vec{F}}$.

   (d) Bestimmen Sie die Fläche, die vom Radiusvektor im Laufe einer Periodendauer überstrichen wird. Um welche Fläche handelt es sich?

3. [3, 2, 6, 2, 3] Gegeben sei das effektive Kepler-Potenzial

   $$U_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\ell^2}{2\mu\rho^2}$$

   mit $\alpha = Gm_1m_2$, der reduzierten Masse $\mu$ und konstantem Drehimpuls $\ell > 0$.

(a) Bestimmen Sie den minimalen Wert $U_{\text{eff}}^{\text{min}}$ des effektiven Potenzials.

(b) Betrachten Sie folgende Gleichung mit positivem Vorzeichen für das Kepler-Potenzial:

$$\phi(\rho) = \phi_0 + \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \mathrm{d}\rho' \frac{\ell}{\rho'^2 \sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{\rho'} - \frac{\ell^2}{\rho'^2}}} =: \phi_0 + \mathcal{I}.$$

Zeigen Sie mittels einer geeigneten Substitution $u' = u'(\rho')$, dass sich das Integral $\mathcal{I}$ umschreiben lässt in

$$\mathcal{I} = -\int\limits_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}u'}{\sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha u'}{\ell} - u'^2}}.$$

(c) Es sei $A = 2\mu E$ und $B = {}^{2\mu\alpha}/_{\ell}$. Führen Sie unter der Wurzel im Nenner eine quadratische Ergänzung durch. Substituieren Sie anschließend $v' = u' - {}^{B}/_{2}$ und zeigen Sie, dass

$$\mathcal{I} = -\int\limits_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v'}{\sqrt{a^2 - v'^2}} \quad \text{mit} \quad a^2 = A + \frac{B^2}{4}.$$

Bestimmen Sie $\mathcal{I}$ und formen Sie dieses um in $\mathcal{I} = \arccos(v/a) - \arccos(v_0/a)$.

(d) Schreiben Sie $v/a$ in der Form $v/a = \frac{1}{e}\left(\frac{p}{\rho} - 1\right)$. Wie lauten $e$ und $p$?

(e) Wählen Sie die Bezugsrichtung für den Winkel $\phi$ so, dass $\phi_0 - \arccos(v_0/a) = 0$ gilt. Zeigen Sie damit $p/\rho = 1 + e\cos\phi$.

4. [6] Wir betrachten die Polargleichung

$$\frac{p}{\rho} = 1 + e\cos\phi$$

für eine Ellipse, das heißt $0 < e < 1$ und $0 < p$. Für die Halbachsen $a$ und $b$ gilt $a := p/(1-e^2)$ beziehungsweise $b := p/\sqrt{1-e^2}$. Definieren Sie $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ sowie $\cos\phi = x/\sqrt{x^2+y^2} = x/\rho$ und zeigen Sie nun, dass die Polargleichung äquivalent ist zu

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

5. [4] Betrachten Sie die Polargleichung $p/\rho = 1 + e\cos\phi$ für eine Ellipse mit

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}} \quad \text{und} \quad p = \frac{\ell^2}{\mu\alpha}$$

für $E_0 = -\mu\alpha^2/2\ell^2 < E < 0$. Berechnen Sie die Längen der Halbachsen $a$ und $b = \sqrt{ap}$ als Funktionen von $E$ und $\ell$.