Name:

Gruppe:

Bearbeitungszeit:

1	2	3	4	$\sum$

Theoretische Physik 1 (B. Ed.) – Übung 5

1. [3, 1, 3, 1, 1, 3] Auf ein Teilchen der Masse m wirke die Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}\,) = -m\omega_x^2 x\hat{e}_x - m\omega_y^2(y - y_1)\hat{e}_y + m\Omega_z^2(z - z_1)\hat{e}_z,$$

wobei ω_x, ω_y und Ω_z sowie y_1 und z_1 positive, reelle Konstanten sind.

a) Gegeben sei der Weg

$$\vec{\alpha} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad t \mapsto \vec{\alpha}(t) = (t, t^2, t^2)^T.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Wegintegrals explizit die längs des Weges geleistete Arbeit.

b) Verifizieren Sie mit Hilfe des Differentiationskriteriums, dass die Kraft konservativ ist.

c) Bestimmen Sie ein zugehöriges Potenzial.

d) Berechnen Sie nun mit Hilfe des Potenzials die Arbeit W_{12}, die entlang eines Weges von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 1, 1)$ geleistet wird.

e) Berechnen Sie die statischen Gleichgewichtskoordinaten.

f) Lösen Sie die aus der gegebenen Kraft resultierenden Bewegungsgleichungen für die Anfangswerte

$$x(0) = x_1, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad y(0) = y_1 \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \quad z(0) = z_1, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0.$$

Hinweis: Die allgemeinen Lösungen der Differenzialgleichungen

$$\ddot{x} + \omega^2(x - x_1) = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{x} - \Omega^2(x - x_1) = 0$$

lauten jeweils

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + x_1$$

und

$$x(t) = A\cosh(\Omega t) + B\sinh(\Omega t) + x_1.$$

2. [3, 1, 3] Gegeben sei ein Teilchen der Masse m, welches sich im Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\left(3\alpha x^2 + \beta y\right)\hat{e}_x - (\beta x + \gamma)\,\hat{e}_y + \delta yz\hat{e}_z$$

mit reellen Parametern α, β, γ und δ bewegt.

a) Berechnen Sie die Arbeit W_{PQ} für einen Weg längs einer Geraden von $P = (0,0,0)$ nach $Q = (A,B,C)$.

b) Für welche Werte von δ ist das Kraftfeld $\vec{F}$ konservativ?

c) Bestimmen Sie für $\delta = 0$ das Potential $V(\vec{x})$ zum Kraftfeld $\vec{F}$ und normieren Sie dieses auf $V(\vec{0}) = \mathcal{N}$.

3. [1, 2, 2, 1, 3] Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x,y,z) = \hat{e}_z \times \vec{r} \quad \text{mit } \vec{r} = (x,y,z)^T.$$

a) Wie lauten die Komponenten $F_x(x,y,z)$, $F_y(x,y,z)$ und $F_z(x,y,z)$?

b) Zeichnen Sie ein (x,y)-Koordinatensystem. Berechnen Sie $\vec{F}(1,0,z)$, $\vec{F}(0,1,z)$, $\vec{F}(-1,0,z)$ sowie $\vec{F}(0,-1,z)$ und tragen Sie das Resultat als Vektoren an den entsprechenden Punkten ein.

c) Drücken Sie nun $\vec{F}$ mit Hilfe von Zylinderkoordinaten aus. In welche Richtung zeigt das Feld für einen fest vorgegebenen Punkt $\vec{r}$?

d) Berechnen Sie $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$.

e) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_{\vec{\alpha}} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$ für die Wege

$$\begin{aligned} &\vec{\alpha}_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad t \mapsto \vec{\alpha}_1(t) = (1-2t, 0, 0)^T \quad \text{und} \\ &\vec{\alpha}_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad t \mapsto \vec{\alpha}_2(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t), 0)^T. \end{aligned}$$

Warum ist das Resultat nicht wegunabhängig?

4. [4, 2, 2, 4] Gegeben sei ein System aus zwei Punktteilchen der Massen m_1 und m_2 mit Koordinaten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$. Schwerpunkt- und Relativkoordinaten sind definiert gemäß

$$\vec{R} := \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{und} \quad \vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2.$$

Für die Gesamtmasse M und die reduzierte Masse μ gilt

$$M := m_1 + m_2 \quad \text{bzw.} \quad \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

a) Drücken Sie die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} m_j \dot{\vec{r}}_j^{\,2}$ in den neuen Koordinaten $\dot{\vec{R}}$, $\dot{\vec{r}}$, M und μ aus.

b) Drücken Sie den Relativimpuls $\vec{p} = \mu\dot{\vec{r}}$ durch $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, m_1, m_2 und M aus.

c) Drücken Sie $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ durch den Relativimpuls, den Gesamtimpuls $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ sowie m_1, m_2 und M aus.

d) Drücken Sie die kinetische Energie T durch $\vec{p}$, $\vec{P}$, μ und M aus.