Anwesenheitsaufgaben 4

zur Vorlesung

„Einführung in die Gittereichtheorie“

im Sommersemester 2018

Dozent: PD Dr. G. von Hippel

1. *Naiver Kontinuumslimes der Wilson-Wirkung*

   Die Wilson-Wirkung für eine $\mathrm{SU}(N_c)$-Eichtheorie auf dem Gitter ist durch das Produkt der Link-Variablen entlang jeder Plakette des Gitters gegeben:

   $$S_W(U) = \beta \sum_{x\in\Lambda} \sum_{\mu<\nu} \left(1 - \frac{1}{N_c} \mathrm{Re}\ \mathrm{tr}\ U_{\mu\nu}(x) \right)$$

   mit

   $$U_{\mu\nu}(x) = U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x+\hat{\nu}) U_\nu(x+\hat{\mu}) U_\mu(x).$$

   (a) Führen Sie ein Eichpotential $A_\mu(x)$ über $U_\mu(x) = \mathrm{e}^{aA_\mu(x+\frac{1}{2}\hat{\mu})}$ ein und benutzen Sie die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel, um $U_{\mu\nu}(x)$ als eine einzige Exponentialfunktion zu schreiben.

   (b) Taylor-entwickeln Sie die Eichpotentiale im Exponenten, um $U_{\mu\nu}(x) = \mathrm{e}^{a^2 F_{\mu\nu}(x) + \mathrm{O}(a^3)}$ zu zeigen.

   (c) Bestimmen Sie den Wert von β, für den die Wilson-Wirkung im naiven Kontinuumslimes $a \to 0$ zur Yang-Mills-Wirkung reduziert.

2. *Das Haar-Maß auf SU(N_c)*

   Das Haar-Maß $\mathrm{d}\mu(U)$ auf einer kompakten halbeinfachen Lie-Gruppe G ist definiert durch die Eigenschaften

   $$\mathrm{d}\mu(VU) = \mathrm{d}\mu(UV) = \mathrm{d}\mu(U) \qquad \text{für alle } V \in G$$

   und

   $$\int_G \mathrm{d}\mu(U) = 1\,.$$

   In dieser Aufgabe wollen wir das Haar-Maß für $\mathrm{SU}(N_c)$ konstruieren.

   (a) Zeigen Sie: Durch

   $$(X, Y) = \mathrm{tr}\left(X^\dagger Y \right)$$

   ist ein Skalarprodukt auf dem Raum $\mathbb{C}^{N_c\times N_c}$ der komplexen $N_c \times N_c$-Matrizen definiert, das unter Multiplikation mit einer unitären Matrix $U \in \mathrm{SU}(N_c)$ invariant ist.

(b) Schlussfolgern Sie, dass eine invariante Metrik auf $\mathrm{SU}(N_c)$ durch

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}U, \mathrm{d}U) = g_{mn}(\alpha)\mathrm{d}\alpha^m \mathrm{d}\alpha^n$$

gegeben ist, wobei $U(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha_k T^k}$ eine Parametrisierung von $\mathrm{SU}(N_c)$ mit antihermitischen Generatoren T^k sei, die $[T^a, T^b] = f_c^{ab} T^c$ erfüllen.

(c) Zeigen Sie: Das Haar-Maß auf $\mathrm{SU}(N_c)$ ist

$$\mathrm{d}\mu(U) = C\sqrt{|\det(g)|}\prod_k \mathrm{d}\alpha_k$$

mit einer Konstanten C. (Hinweis: Benutzen Sie die Transformationseigenschaften des metrischen Tensors unter einer Koordinatentransformation $\alpha \mapsto \alpha'$).

(d) Nutzen Sie die Identität $UU^\dagger = \mathbb{1}$, um einen Ausdruck für $g_{mn}(\alpha)$ herzuleiten.

(e) Zeigen Sie die folgenden Integrale:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{SU(N_c)}} \mathrm{d}\mu(U) U_{ij} &= 0 \\
\int_{\mathrm{SU(N_c)}} \mathrm{d}\mu(U) U_{ij} U^*_{kl} &= \frac{1}{N_c}\delta_{ik}\delta_{jl}
\end{aligned}$$

3. *Transfermatrix für die reine Eichtheorie mit Wilson-Wirkung*

In dieser Aufgabe wollen wir die Transfermatrix für die reine Eichtheorie mit Feldern $U_{x,\mu} \in \mathrm{SU}(N_c)$ und der Wilson-Wirkung

$$S_{\mathrm{W}} = \beta \sum_x \sum_{\nu<\mu} \frac{1}{N_c} \mathrm{Re}\ \mathrm{Tr}(\mathbb{1} - U_{x,\mu\nu})$$

bestimmen, wobei $U_{x,\mu\nu} = U_{x,\mu} U_{x+\hat{\mu},\nu} U^\dagger_{x+\hat{\nu},\mu} U^\dagger_{x,\nu}$ die kleinstmögliche Wilson-Schleife auf dem Gitter (eine Plakette) ist.

Als Hilbert-Raum betrachten wir den Raum, der von den Eigenzuständen $|U\rangle$ der räumlichen Link-Operatoren $\hat{U}_{\mathbf{x},k}$ (mit $\hat{U}_{\mathbf{x},k}|U\rangle = U_{\mathbf{x},k}|U\rangle$) aufgespannt wird. Die Orthonormalitätsrelation setzen wir als

$$\langle U'|U\rangle = \prod_{\mathbf{x},k} \delta(U'_{\mathbf{x},k} - U_{\mathbf{x},k})$$

mit einer gemäß

$$\int \mathrm{d}\mu(U)\, \delta(U - U') = 1$$

normierten Dirac-Verteilung.

(a) Überzeugen Sie sich, dass damit das Skalarprodukt zwischen zwei beliebigen Zuständen durch

$$\langle \phi|\psi\rangle = \int \prod_{\mathbf{x},k} \mathrm{d}\mu(U_{\mathbf{x},k})\, \phi^*(U)\psi(U)$$

mit geeignet definierten und normierten Wellenfunktionen ψ, ϕ gegeben ist.

(b) Unter einer Eichtransformation Ω transformieren sich die räumlichen Linkvariablen gemäß $U^{\Omega}_{\mathbf{x},k} = \Omega_{\mathbf{x}} U_{\mathbf{x},k} \Omega^{\dagger}_{\mathbf{x}+\hat{\mathbf{k}}}$. Zeigen Sie, dass durch $(\hat{D}(\Omega)\psi)(U) = \psi(U^{\Omega})$ eine Darstellung der Eichgruppe auf dem Hilbert-Raum gegeben ist.

(c) Physikalische Zustände müssen eichinvariant sein. Zeigen Sie, dass durch

$$(\hat{P}_{\text{phys}}\psi)(U) = \int \prod_{\mathbf{x}} \mathrm{d}\mu(\Omega_{\mathbf{x}})\, \psi(U^{\Omega})$$

eine Projektion auf den Unterraum der eichinvarianten Zustände gegeben ist.

(d) Zerlegen Sie die Wilson-Wirkung in einen rein räumlichen und einen raum-zeitlichen Anteil, und folgern Sie, dass sie in der Form

$$S_{\text{W}} = \sum_n \left(\frac{1}{2} V(U^{(n+1)}) + K(U^{(n+1)}, U_0^{(n)}, U^{(n)}) + U + \frac{1}{2} V(U^{(n)}) \right)$$

mit rein räumlichen Linkvariablen $U^{(n)}$ auf der Zeitscheibe $t = na$ und zeitlichen Linkvariablen $U_0^{(n)}$ zwischen den Zeitscheiben $t = na$ und $t = (n+1)a$ geschrieben werden kann. Bestimmen Sie jeweils V und K explizit.

(e) Folgern Sie, dass die Transfermatrix als $\hat{T} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\hat{V}} \hat{T}_K \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\hat{V}}$ mit $\hat{V}|U\rangle = V(U)|U\rangle$ und $\hat{T}_K = \hat{T}_K^0 \hat{P}_{\text{phys}}$ mit

$$\langle U' | \hat{T}_K^0 | U \rangle = \mathrm{e}^{\beta \sum_{\mathbf{x},k} \frac{1}{N_c} \mathrm{Re}\ \mathrm{Tr}\left(\mathbb{1} - \mathrm{U}'_{\mathbf{x},\mathbf{k}} \mathrm{U}^{\dagger}_{\mathbf{x},\mathbf{k}}\right)}$$

geschrieben werden kann. Welche Rolle übernimmt das zeitliche Eichfeld U_0?

(f) Zeigen Sie, dass $[\hat{P}_{\text{phys}}, \hat{T}] = 0$, und schlussfolgern Sie, dass die Zeitevolution physikalische Zustände auf physikalische Zustände abbildet.

(g) Zeigen Sie, dass $\langle\psi|\hat{T}|\psi\rangle > 0$ für alle physikalischen Zustände $|\psi\rangle$ gilt, solange $\langle\phi|\hat{T}_K^0|\phi\rangle > 0$ für beliebige Zustände $|\phi\rangle$ gilt. Warum ist letzteres der Fall?

4. *Wilson-Schleifen und statisches Potential*

Wir betrachten die Theorie eines statischen skalaren Feldes $\phi_x \in \mathbb{C}^{N_c}$ mit der Wirkung

$$S = S_{\text{W}} + a^4 \sum_x \left(\nabla_0 \phi_x^{\dagger} \nabla_0 \phi_x + m^2 \phi^{\dagger} \phi \right)$$

mit der kovarianten Ableitung $\nabla_\mu \phi_x = a^{-1} \left(U_{x,\mu} \phi_{x+\hat{\mu}} - \phi_x \right)$.

(a) Zeigen Sie, dass der Propagator des skalaren Feldes bei gegebenem Eichfeld U durch

$$\langle \phi_x \phi_y^{\dagger} \rangle = \frac{a}{2\sinh(a\omega)} \mathrm{e}^{-\omega|x_0 - y_0|} \theta(x_0 - y_0) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \prod_{n=0}^{a^{-1}|x_0-y_0|-1} U_{y+n\hat{0},0}$$

gegeben ist.

(b) Betrachten Sie nun den Operator $O_R(t) = \phi^\dagger_{x+R\hat{k}} \left(\prod_{m=0}^{R-1} U_{x+m\hat{k}}\right) \phi_x$ mit $x_0 = t$, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ und zeigen Sie

$$\langle O_R^\dagger(t) O_R(0)\rangle = C\langle \mathcal{W}_{RT}\rangle \mathrm{e}^{-E_0 t}$$

mit Konstanten C und E_0, wobei $\mathcal{W}_{RT}$ eine rechteckige Wilson-Schleife mit den Seitenlänge R und T ist.

(c) Benutzen Sie die Transfermatrix, um zu begründen, warum für das Potential $V(R)$ zwischen zwei statischen Quellen damit

$$V(R) \sim -\frac{1}{T}\log\langle \mathcal{W}_{RT}\rangle$$

für $0 \ll T \ll N_t$ folgt.

(d) Schlussfolgern Sie, dass ein *area law* für die Wilson-Schleife ein lineares Potential $V(R) \sim \sigma R$ impliziert.