Anwesenheitsaufgaben 2

zur Vorlesung

„Einführung in die Gittereichtheorie“

im Sommersemester 2018

Dozent: PD Dr. G. von Hippel

1. *Die Hopping-Parameter-Entwicklung*
   (a) Betrachten Sie die Theorie eines freien Feldes ϕ mit Masse m_0 und zerlegen Sie die Wirkung in eine Summe aus einem lokalen Term und einem Term, der benachbarte Gitterpunkte miteinander koppelt. Führen Sie nun eine Reskalierung $\phi = \sqrt{2\kappa}\varphi$ aus. Für welchen Wert von κ als Funktion von m_0 wird der Koeffizient des lokalen Terms gleich eins?

   (b) Im Folgenden nehmen wir an, dass κ den in der vorangehenden Aufgabe gefundenen Wert hat. Welcher Wert κ_c von κ entspricht einer verschwindenden Masse?

   (c) Betrachten Sie nun eine Korrelationsfunktion der Form $\langle \varphi_x \varphi_y \rangle$ und entwickeln Sie das zugehörige Pfadintegral in Potenzen von κ. Unter welchen Bedingungen ergibt sich ein nichtverschwindender Beitrag? Interpretieren Sie das Ergebnis graphisch.

2. *Von der ϕ^4-Theorie zum Ising-Modell*
   (a) Führen Sie nun eine Wechselwirkung $V_I(\phi) = \frac{\lambda_0}{4!}\sum_x \phi_x^4$ zur Theorie hinzu. Für welche Werte von κ und λ als Funktion m_0 und λ_0 nimmt der lokale Term die Form $\varphi_x^2 + \lambda(\varphi_x^2 - 1)^2$ an?

   (b) Betrachten Sie nun den Grenzwert $\lambda \to \infty$ und zeigen Sie, dass in diesem die Theorie als ein Ising-Modell mit Partitionssumme

   $$Z = \sum_{\{\sigma=\pm 1\}} \mathrm{e}^{-\beta H(\sigma)}$$

   und Hamilton-Funktion

   $$H = -J \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j$$

   geschrieben werden kann, wobei die Summe über (i, j) über alle Paare von Nachbarn auf dem Gitter läuft.

3. *Lösung des Ising-Modells in einer Dimension und unendlich vielen Dimensionen*
   (a) Schreiben Sie das Pfadintegral für das Ising-Modell in einer Dimension mit Hilfe der Transfer-Matrix (hier einer 2×2-Matrix!). Durch Diagonalisieren der Transfer-Matrix können Sie damit im thermodynamischen Limes ($L \to \infty$) die exakte Lösung für die freie Energie $F = -\frac{1}{\beta}\log Z$ erhalten.

   (b) Im entgegengesetzten Fall unendlich vieler Dimensionen, $D \to \infty$ können wir die Summe der Nachbarspins durch den Erwartungswert des Spins ersetzen: $\sum_{(i,j)} \sigma_j \to 2D\langle \sigma_i \rangle$. Benutzen Sie diesen Ansatz, um eine Gleichung herzuleiten, der $m = \langle \sigma_i \rangle$ genügen muss.

(c) Wenn wir den unendlich-dimensionalen Ansatz auch in endlicher Dimension machen, erhalten wir eine Näherungslösung ("*mean-field*-Näherung"). Wann hat die entsprechende Gleichung jeweils wieviele Lösungen? Interpretieren Sie das Ergebnis graphisch und physikalisch.

4. *Niedertemperaturentwicklung des Ising-Modells*

   (a) Bestimmen Sie die Energie des (homogenen) Grundzustands des Ising-Modells im Volumen $V = L^D$.

   (b) Betrachten Sie nun Zustände, die sich vom Grundzustand durch 1 bzw. 2 invertierten Spins unterscheiden. Wieviele solche Zustände gibt es jeweils, und was ist deren Energie?

   (c) Benutzen Sie die Ergebnisse der vorangehenden Teilaufgaben, um die Zustandssumme Z in eine Reihe in einer geeigneten Variablen λ (mit $\lambda \to 0$ für $\beta \to \infty$) zu entwickeln.

   (d) Begründen Sie, warum die freie Energie pro Spin, $\frac{F}{V}$, von V unabhängig ist.

5. *Hochtemperaturentwicklung des Ising-Modells*

   (a) Zeigen Sie, dass für $s, s' = \pm 1$ die Identität
   $$\mathrm{e}^{\beta s s'} = \cosh\beta\,(1 + ss'\tanh\beta)$$
   gilt.

   (b) Nutzen Sie diese Identität, um die Zustandssumme des Ising-Modells als
   $$Z = (\cosh(\beta J))^V \sum_{\{n_{ij}=0,1\}} \kappa^{\sum_{(i,j)} n_{ij}} \sum_{\{\sigma\}} \prod_{(i,j)} (\sigma_i \sigma_j)^{n_{ij}}$$
   mit $\kappa = \tanh(\beta J)$ zu schreiben.

   (c) Betrachten Sie nun den Beitrag eines bestimmten Spins σ_l zur Zustandssumme, und zeigen Sie, dass dieser einen Faktor 2 zu $\sum_{\{\sigma\}} \prod_{(i,j)} (\sigma_i\sigma_j)^{n_{ij}}$ beiträgt, wenn $\sum_k n_{lk}$ gerade ist, während die Zustandssumme ansonsten verschwindet.

   (d) Benutzen Sie das Ergebnis der vorangehenden Teilaufgabe, um Z als eine Summe über Konfigurationen lediglich der Hilfsvariablen n_{ij} zu schreiben, und interpretieren Sie diese geometrisch.

6. *Dualität des Ising-Modells in zwei Dimensionen*

   (a) Vergleichen Sie die führenden Terme in der Hoch- und Niedertemperaturentwicklung des Ising-Modells in $D = 2$. Was fällt auf?

   (b) Erklären Sie sich diese Beobachtung, indem Sie sich die jeweils führenden Konfigurationen geometrisch betrachten und bedenken, dass in $D = 2$ der Rand eines Gebiets eine Kurve ist.

   (c) Schlussfolgern Sie, dass es eine Abbildung $d : [0; \infty) \to [0; \infty)$ gibt, so dass die Kenntnis der Zustandssumme bei β auch die der Zustandssumme bei $d(\beta)$ impliziert.

   (d) Für welchen Wert β^* von β gilt $d(\beta^*) = \beta^*$?