Übungsblatt 6

Aufgabe 1:

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$9 = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

$6 = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$8 = 3x_1 + x_2 + 2x_3$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Determinante und die Inversen, falls diese existieren.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -4 & 1 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3:

Für $\phi \in [0, 2\pi)$ sei die Matrix $D_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie das Matrixprodukt $D_3(\phi)D_3(\phi)^T$.

(b) Bestimmen Sie, wie sich $D_3(\phi)$ auf einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ auswirkt und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

(c) Begründen Sie, ohne Rechnung, welche Auswirkung die Matrizen

$D_2(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$ und $D_1(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$

auf einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ haben.

Aufgabe 4:

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Spatprodukt $V_{\text{Spat}} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ unverändert bleibt unter zyklischem Vertauschen der Faktoren, sodass $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$. Zeigen Sie nun mit Hilfe der Determinante, dass daraus $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$ folgt.

Aufgabe 5:

Zeigen Sie nun mit Hilfe des Levi-Civita-Tensors ϵ_{ijk} und des Kronecker-Deltas δ_{ij}, dass $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$ und $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = -(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}$. Sie können die folgenden Identitäten benutzen:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{ij}\delta_{ij}a_i b_j \qquad (\vec{a}\times\vec{b})_i = \sum_{jk}\epsilon_{ijk}a_j b_k \qquad \sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$

Aufgabe 6:

Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$

(b) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

(c) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$

Ein kleiner Exkurs - Das Levi-Civita Symbol (Epsilon Tensor)

Das Levi-Civita-Symbol $\epsilon_{ijk\ldots}$, auch Permutationssymbol, oder (etwas umgangssprachlicher) Epsilon-Tensor genannt, ist ein Symbol, das in der Physik bei der Vektor- und Tensorrechnung nützlich ist, wenn Identitäten gezeigt und keine expliziten Berechnungen erfordert werden. Die Definition lautet:

$$\epsilon_{ijk\ldots} = \begin{cases} +1, & \text{falls } (i,j,k,\ldots) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3,\ldots) \text{ ist,} \\ -1, & \text{falls } (i,j,k,\ldots) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3,\ldots) \text{ ist,} \\ 0, & \text{wenn mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases}$$

Für die dreidimensionale Vektorrechnung folgt so z.B., dass $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$, da unter zyklischer Permutation der Tensor unverändert bleibt. Allerdings, wie in der Definition angegeben, gilt dann auch, dass $\epsilon_{123} = -\epsilon_{213} = -\epsilon_{132} = -\epsilon_{321}$. Für die Berechnung des Kreuzproduktes ist dies sehr nützlich. Hier kann man schreiben:

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_i = \sum_{jk}\epsilon_{ijk}a_j b_k$

In Worten: Die i-te Komponente des durch das Kreuzprodukt entstehenden Vektors, besteht aus der Summe über die j- und k-te Komponente der ursprünglichen Vektoren. Da nur über j und k summiert wird, erhält man als Mögliche Kombination des Tensors zum einen ϵ_{ijk} und zum andren ϵ_{ikj}. Dadurch erfolgt der Vorzeichenwechsel in der Summe, denn $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$. Betrachten wir nun explizit das Kreuzprodukt $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ kann man ablesen:

für $i = 1$:

$$\begin{aligned}
c_1 = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{1jk} a_j b_k &= \epsilon_{111} a_1 b_1 + \epsilon_{112} a_1 b_2 + \epsilon_{113} a_1 b_3 + \epsilon_{121} a_2 b_1 + \epsilon_{131} a_3 b_1 \\
&+ \epsilon_{122} a_2 b_2 + \epsilon_{133} a_3 b_3 \\
&+ \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2 \\
&= a_2 b_3 - a_3 b_2
\end{aligned}$$

Alle Terme, in denen Indizes mehrfach vorkommen, sind, wie definiert, Null. So bleiben nur zwei Komponenten übrig. In diesen ist $\epsilon_{123} = 1$ und $\epsilon_{132} = -1$, sodass, wie gewohnt, $c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$. Ebenso kann man diese Rechnung für $i = 2$ und $i = 3$ durchführen und erhält dann $c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$ und $c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$.