Übungsblatt 5

Aufgabe 1:

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (0,\ 1)$, $\vec{b} = (2,\ -1)$ und $\vec{c} = (-1,\ -1)$. Berechnen Sie:

(a) $\vec{a} + \vec{b}$ (b) $\vec{b} - \vec{c}$ (c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (d) $\vec{c} - \vec{b} - \vec{a}$

Aufgabe 2:

Skizzieren Sie den Inhalt des Assoziativgesetzes für Vektoraddition. Gelten für diese Addition und die Multiplikation mit einem Skalar auch Kommutativ- und Distributivgesetz?

Aufgabe 3:

Zeigen Sie die Dreiecksungleichung $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie den Wert für γ, für welchen die Vektoren $\vec{a} = (1,\ 1,\ -1)$, $\vec{b} = (1,\ 0,\ 1)$ und $\vec{c} = (1,\ \gamma,\ -1)$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 5:

Es sei $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, wobei $\vec{a} \neq 0$ und $\vec{b} \neq 0$. Zeigen Sie in einer Skizze, was dies für den Winkel zwischen den beiden Vektoren bedeutet.

Aufgabe 6:

Berechnen Sie jeweils $\vec{a} \cdot \vec{a}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ für

(a) $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{b} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

(b) $\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{b} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

(c) $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \quad \vec{b} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_3$

Aufgabe 7:

Gegeben sei ein Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$. Geben Sie an, für welche Fälle das Gleichheitszeichen gültig ist für beliebige Vektoren $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ und $\vec{c} = (c_1,\ c_2,\ c_3)$.

(a) $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \stackrel{?}{=} (1,\ 1,\ 1)$ (b) $\vec{a} \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^{3} (\vec{a} \cdot \vec{e}_i)\vec{e}_i$ (c) $\vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{?}{=} \sum_{1=1}^{3} a_i b_i$

Aufgabe 8:

Bestimmen Sie die Länge $\vec{a}$ des Dreiecks, welches durch die beiden Seiten $\vec{b} = (2,\ 4,\ 0)$ und $\vec{c} = (0,\ 0,\ 3)$ aufgespannt wird. Berechnen Sie außerdem die Innenwinkel α, β und γ des Dreiecks.

Aufgabe 9:

Bestimmen Sie für $\vec{y}_1 = (2,\ -1,\ 1)$, $\vec{y}_2 = (1,\ 3,\ -2)$, $\vec{y}_3 = (-2,\ 1,\ -3)$ und $\vec{y}_4 = (3,\ 2,\ 5)$ die Skalare a, b und c, für welche $\vec{y}_4 = a\vec{y}_1 + b\vec{y}_2 + c\vec{y}_3$.

Aufgabe 10:

Geben Sie die allgemeine Formel zur Zerlegung eines Vektors in einen zu einem zweiten Vektor parallelen bzw. senkrechten Anteil an. Skizzieren Sie hierfür außerdem $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit den Anteilen $\vec{a}_\perp$ und $\vec{a}_\parallel$.

Aufgabe 11

Durch die Punkte $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(5,\ 2,\ 0)$, $B(2,\ 5,\ 0)$ und $C(1,\ 2,\ 4)$ sei eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche gegeben. Berechnen Sie die Grundfläche G_{ABC}, die Höhe h und das Volumen der Pyramide. Hierbei ist $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6}V_{\text{Spat}} = \frac{1}{3}G_{ABC} \cdot h$ mit dem Volumen des Spatprodukts (V_{Spat}).

Aufgabe 12:

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij}\delta_{jk}$ (b) $\sum_{i=1}^{3} \delta_{ii}$ (c) $\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij}a_j$

Aufgabe 13:

Die Bahnkurve eines Massenpunktes sei gegeben durch $\vec{x}(t) = (3e^{-2t},\ 3\sin(4t),\ 5\cos(4t))$, wobei t der Bahnparameter ist. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}$ und den Betrag der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}(t = 0)$.

Aufgabe 14:

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$