Übungsblatt 4

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_{-1}^{1} x^4 \,\mathrm{d}x$ (b) $\int_{1}^{e} \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t$ (c) $\int_{0}^{1} (\cos(\pi x) - \sin(\pi x)) \,\mathrm{d}x$

(d) $\int_{-a}^{a} x^3 - x^5 \,\mathrm{d}x$ (e) $\int_{0}^{2\pi} \sin^2(x) \,\mathrm{d}x$ (f) $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \,\mathrm{d}z$

Aufgabe 2:

Zeigen Sie durch partielle Integration die folgende Beziehung:

$$\int (\ln x)^n \,\mathrm{d}x = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \,\mathrm{d}x \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 3:

Lösen Sie die folgenden Integrale durch partielle Integration:

(a) $\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x$ (b) $\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x$ (c) $\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$

(d) $\int (x+1) \sin x \,\mathrm{d}x$ (e) $\int \tan x \,\mathrm{d}x$

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die folgenden Integrale durch geeignete Substitution:

(a) $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{(3x-1)^4}$ (b) $\int x^2 e^{x^3} \,\mathrm{d}x$ (c) $\int (x+2) \sin(x^2 + 4x - 6) \,\mathrm{d}x$

(d) $\int 2^{-x} \tanh(2^{1-x}) \,\mathrm{d}x$

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung oder Polynomdivision:

(a) $\int \frac{1}{x^2-1} \,\mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{\frac{1}{4}x^3 + x^2 - 1 - \frac{1}{4}x}{x+1} \,\mathrm{d}x$ (c) $\frac{1}{x^3 - x} \,\mathrm{d}x$

Aufgabe 6:

Berechnen Sie:

(a) $\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-ax} \,\mathrm{d}x,\ a > 0$ (b) $\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \,\mathrm{d}x$

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x \alpha e^{-\alpha y}\,\mathrm{d}y$, für $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x \sin(y^3)\,\mathrm{d}y$

Aufgabe 8:

Betrachten Sie die Funktion $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\quad \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

Diese sogenannte Gammafunktion verallgemeinert das Konzept der Fakultät auf nicht ganzzahlige Zahlen gemäß der Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für $x > 0$.

(a) Beweisen Sie die Funktionalgleichung durch partielle Integration.

(b) Zeigen Sie, dass außerdem $\Gamma(n+1) = n!$, $(n \in \mathbb{N})$.

Aufgabe 9:

Betrachten Sie das Integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp(-x^2)$.

(a) Berechnen Sie $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \exp(-(x^2+y^2))$. Benutzen Sie hierzu die Polarkoordinaten $r = \sqrt{x^2+y^2}$ und $\phi = \arctan\frac{y}{x}$ und ersetzen Sie die Integration über x und y durch eine Integration über r und ϕ. Überlegen Sie, wie die Integrationsgrenzen der Radialkomponente r und des Winkelanteils ϕ anzupassen sind. Das Flächenelement in Polarkoordinaten ist gegeben durch $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r$.

(b) Zeigen Sie nun für die allgemeine Form von I, dem sogennaten Gauß'schen Integral, dass $G = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp(-\alpha x^2) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

Hinweis: Verwenden Sie nicht die Gammafunktion.