Übungsblatt 3

Aufgabe 1:

Zusatz zu Blatt 2: Führen Sie für die folgenden Brüche Partialbruchzerlegungen durch:

(a) $\dfrac{1}{x^2 - x - 6}$ (b) $\dfrac{6 - x}{(x-3)(2x-5)}$ (c) $\dfrac{1}{x^2 - 16}$

Aufgabe 2:

Betrachten Sie die stückweise definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 8a + 16x, & x < 2 \\ a^2(x+2), & 2 \leq x \end{cases}$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist diese Funktion stetig?

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen mit Hilfe der h-Methode, so wie es in der Vorlesung gezeigt wurde:

(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (c) $f(x) = \sqrt{x}$

Aufgabe 4:

Zur Einprägung: Geben Sie die Ableitungsregeln an. Geben Sie außerdem ein explizites Beispiel, in welchem die jeweilige Regel verwendet wird:

(a) Summen-/Differenzregel (b) Produktregel

(c) Quotientenregel (d) Kettenregel

Aufgabe 5:

Leiten Sie die Quotientenregel mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel her.

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen nach dem angegebenen Argument:

(a) $3x^2 + 7z^3 + 6x, \quad x$ (b) $a \ln a - a, \quad a$ (c) $a(\ln a - a), \quad a$

(d) $(xy+1)(x^2-1) + xy^2, \quad x$ (e) $\tan x, \quad x$ (f) $b^x, \quad x$

(g) $(\theta^2\nu + \theta)(\theta^2 - 1) + \theta\nu, \quad \nu$ (h) $\cos(2x), \quad x$ (i) $a^{2a}, \quad a$

(j) $\dfrac{1}{2}(\gamma - \sin(\gamma)\cos^2(\gamma)), \quad \gamma$ (k) $\ln(\tan(\xi)), \quad \xi$ (l) $\arcsin(\sqrt{1-z^2}), \quad z$

(m) $\log_a b, \quad a$ (n) $\log_a b, \quad b$

Aufgabe 7:

Bilden Sie die n-te Ableitung nach dem angegebenen Argument:

(a) $\exp(-\beta z), \quad \beta$

(b) $\alpha(m), \quad \alpha$

(c) $\sin(\delta u), \quad u$

(d) $\sqrt{2x+1}, \quad x$

Aufgabe 8:

Zeigen Sie, dass für die Funktion $f(x) = \ln(1 - \frac{x}{2})$ die n-te Ableitung gegeben ist durch

$$f^{(n)}(x) = -\frac{(n-1)!}{(2-x)^n} \qquad \text{für } 1 \leq n,\ n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 9:

Berechnen Sie für die implizit definierte Funktion $y = g(x)$ die Ableitung nach x.

(a) $xy^3 - 3x^3 = xy + 5$ (b) $\exp(xy) + y\ln(x) = \cos(2xy)$

Aufgabe 10:

Führen Sie für die folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch und skizzieren Sie.
(*Stichworte:* Nullstellen, lokale Maxima/Minima, Sattelpunkte, Wendepunkte, Symmetriepunkte/-achsen):

(a) $f(x) = -\frac{1}{36} \cdot (3x^5 - 50x^3 + 135x)$ (b) $f(x) = \frac{1}{9}x^5 - \frac{20}{27}x^4 + \frac{10}{9}x^3$

(c) $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} \cdot (1+x)$ (d) $f(x) = (1-x^2) \cdot e^{0,5x^2}$

Aufgabe 11

Konstruieren Sie jeweils die ersten drei (nicht verschwindenden) Glieder der Taylorreihenentwicklung um x_0.

(a) $f(x) = \sin(x), \quad x_0 = 0$ (b) $f(x) = \tan(x), \quad x_0 = 0$

(c) $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 0$ (d) $f(x) = \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{s\sigma^2}\right), \quad x_0 = \mu$

(e) $f(x) = \ln(1-x), \quad x_0 = 0$ (f) $f(x) = \left(\frac{1}{-x+1}\right)^n, \quad x_0 = 0, \quad n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 12:

Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen mit der Regel von l'Hospital:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x - 1}$

(b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^3 - 7x + 6}$

(c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 - 10x + 24}{x - 2}$

(d) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin(x)}{\pi - x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

(f) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$