Anwesenheitsaufgaben 1

zur Vorlesung

„Einführung in die Gittereichtheorie"

im Sommersemester 2018

Dozent: PD Dr. G. von Hippel

1. *Das freie Skalarfeld auf dem Gitter*

   (a) Zeigen Sie, dass für periodische Randbedingungen $\phi_{x+Le_\mu} = \phi_x$ die Identität

   $$\sum_{x\in\Lambda} \phi_x \delta_\mu^+ \psi_x = -\sum_x \left(\delta_\mu^- \phi_x\right) \psi_x$$

   gilt.

   (b) Schlussfolgern Sie, dass die euklidische Wirkung für ein freies skalares Feld,

   $$S = \sum_{x\in\Lambda} \left(\frac{1}{2} \delta_\mu^+ \phi_x \delta_\mu^+ \phi_x + \frac{m^2}{2} \phi_x^2 \right)$$

   in der Form

   $$S = \frac{1}{2} \sum_{x,y\in\Lambda} \phi_x M_{xy} \phi_y$$

   mit einer zu bestimmenden Matrix M geschrieben werden kann.

   (c) Folgern Sie des Weiteren, dass die Partitionsfunktion als

   $$Z = \int \mathrm{D}\phi \, \mathrm{e}^{-S} = \frac{1}{\sqrt{\det M}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\log\det M} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\log M}$$

   geschrieben werden kann.

   (d) Bestimmen Sie mit Hilfe der generierenden Funktion

   $$Z(J) = \int \mathrm{D}\phi \, \mathrm{e}^{-S + \sum_x J_x \phi_x}$$

   und einer geeigneten Variablentransformation einen allgemeinen Ausdruck für die Erwartungswerte

   $$\langle \phi_{x_1} \cdots \phi_{x_n} \rangle :\equiv \frac{1}{Z} \int \mathrm{D}\phi \, \mathrm{e}^{-S} \phi_{x_1} \cdots \phi_{x_n}.$$

   (Hinweis: Benutzen Sie die Inverse G von M!)

(e) Veranschaulichen Sie sich diesen Ausdruck für $n = 2, 4, 6$ jeweils diagrammatisch, indem Sie für jeden Summanden ein Diagramm skizzieren, in dem Sie die Punkte x_i markieren und jeweils zwischen x_i und x_j eine Linie ziehen, wenn $G_{x_i x_j}$ auftritt.

(f) Bestimmen Sie mit Hilfe der Fourier-Transformation einen Ausdruck für G_{xy}.

(g) Zeigen Sie mit Hilfe eines geeigneten Konturintegrals in der komplexen ($z = \mathrm{e}^{ip_4}$)-Ebene, dass im Grenzwert $L \to \infty$

$$\sum_{\mathbf{x}} G_{(\mathbf{x},t),(\mathbf{0},0)} \sim \mathrm{e}^{-mt}, \quad t \to \infty$$

gilt.

(h) Interpretieren Sie das Ergebnis der vorstehenden Teilaufgabe mit Hilfe der Transfermatrix, und schlussfolgern Sie, dass die Theorie tatsächlich freie Teilchen der Masse m beschreibt.

(i) Betrachten Sie nun einen Erwartungswert der Form $\langle \phi_{x_1} \cdots \phi_{x_n} \phi_{z_1}^{\nu} \cdots \phi_{z_m}^{\nu} \rangle$ in der freien Theorie. In welchen Fällen treten wieviele äquivalente Summanden auf? Skizzieren Sie für $\nu = 3, 4$ jeweils Diagramme für die Fälle $n = 2, 3, 4$, $m = 1, 2$. Wie lässt sich deren Multiplizität jeweils bestimmen?

(j) Betrachten Sie nun die Theorie eines selbstwechselwirkenden skalaren Feldes ϕ mit der Wirkung $S(\phi) = \frac{1}{2}\phi^t M \phi + \sum_x \frac{\lambda}{\nu!}\phi_x^{\nu}$, und entwickeln Sie die erzeugende Funktion

$$Z(J) = \int \mathrm{D}\phi \, \mathrm{e}^{-S(\phi) + J^t \phi}$$

in Potenzen von λ. Geben Sie einen Ausdruck für Erwartungswerte in der wechselwirkenden Theorie mittels Erwartungswerten in der freien Theorie an. Interpretieren Sie das Ergebnis mit Hilfe der Ergebnisse der vorangegangenen Teilaufgaben in Form von (Feynman-)Diagrammen.

(k) Benutzen Sie nun die Fourier-Transformation, um die Feynman-Diagramme in die aus dem Kontinuum gewohnte Impulsraum-Form zu bringen. Welche bemerkenswerten Unterschiede zur Störungstheorie im Kontinuum fallen auf?

2. *Reihenentwicklung von Integralen*

(a) Betrachten Sie das Integral

$$Z(m, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\phi \, \mathrm{e}^{-\frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4}$$

und bestimmen Sie durch je gliedweise Integration dessen formale Entwicklung in

i. Potenzen von λ bzw.

ii. Potenzen von m.

(b) Was lässt sich anhand der Koeffizienten über die Konvergenz bzw. Divergenz der jeweiligen Reihen sagen?

(c) Benutzen Sie ein Computeralgebra-Programm, um $Z(m, \lambda)$ exakt zu bestimmen und vergleichen Sie den Graphen von $Z(1, x)$ mit den Reihenentwicklungen in x und $1/x$ zur jeweils ersten bis vierten nicht-verschwindenden Ordnung.