Übungsblatt 7

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie zu den folgenden Matrizen jeweils die transponierte, komplex-konjugierte, adjungierte, und die inverse Matrix:

(a) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2:

Sei $f(x,y) = x^3 - 2xy + 3y^2$. Bestimmen Sie:

(a) $f(2,-3)$ (b) $f(a, \frac{2}{3}b)$ (c) $f(y, \frac{1}{x})$

Aufgabe 3:

Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion $f(\mu,\nu) = \sqrt{6 - 2\mu - 3\nu}$ an und skizzieren ihn.

Aufgabe 4:

Bilden Sie die gemischten ersten Ableitungen der folgenden Funktionen nach den gegebenen Argumenten in der angegebenen Reihenfolge:

(a) $f(x,y) = 2x^3y^2, \quad x, y$ (b) $f(x,y) = 2x^3y^2, \quad y, x$ (c) $g(\alpha,\beta) = \alpha\sin\beta, \quad \alpha, \beta$

Aufgabe 5:

Bilden Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen (also für jede der Variablen) der folgenden Funktionen:

(a) $f(a,b) = a^2b + \exp(ab^2)$ (b) $h(x,y,z) = x^2 + 2yz$

Aufgabe 6:

Geben Sie zu den folgenden Funktionen das totale Differential $\mathrm{d}f$ an:

(a) $f(x,y) = x^3y - 3y$ (b) $f(u,v) = u^2\exp(\frac{u}{v})$

Aufgabe 7:

Gegeben sei das totale Differential $\mathrm{d}\Phi(x,y) = (3x^2y - 2y^2)\mathrm{d}x + (x^3 - 4xy + 6y^2)\mathrm{d}y$. Bestimmen Sie die Funktion $\Phi(x,y)$.

Aufgabe 8:

Berechnen Sie den Gradientenvektor $\nabla\Phi(x,y,z)$ für:

(a) $\Phi(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}$ (b) $\Phi(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Aufgabe 9:

Es sei $\Phi(k,l,m) = k^2 l m^2$ und $\boldsymbol{A}(k,l,m) = (km,\ \ -l^2,\ \ 2k^2 l)^{\mathrm{T}}$. Berechnen Sie:

(a) $\nabla\Phi$ (b) $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ (c) $\nabla \times \boldsymbol{A}$ (d) $\nabla \cdot (\Phi\boldsymbol{A})$ (e) $\nabla \times (\Phi\boldsymbol{A})$

Hinweis: Beachten Sie das ∇ der Vektor der partiellen Ableitung ist und verwenden Sie die Definitionen von Skalar- und Vektorprodukt.

Aufgabe 10:

Sei G ein Gebiet in der (x, y)-Ebene, begrenzt durch die Kurven $y = x^2$, $x = 2$ und $y = 1$. Skizzieren Sie G und berechnen Sie auf dieser Fläche die Integrale:

(a) $\int_G 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (b) $\int_G (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Aufgabe 11

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen durch einen Separationsansatz:

(a) $\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t) = \alpha(t)$ (b) $\frac{\partial\theta}{\partial t}(t) = \frac{1}{\theta(t)}$ (c) $\frac{\partial y}{\partial t}(t) = \exp(-\xi y(t))$

(d) $\frac{\partial\zeta}{\partial t}(t) = \cos^2(\zeta(t))$