

Übungsblatt 2

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke für $f(x) = x^2 + 2x$ mit $0 < x < \infty$:

(a) $f(x^{-1})$ (b) $(f(x))^{-1}$ (c) $f^{-1}(x)$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow f^{-1} : \mathbb{R}$ zu $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Skizzieren Sie sowohl $f(x)$ als auch $f^{-1}(x)$.

Aufgabe 3:

Sind die folgenden Funktionen gerade oder ungerade? Geben Sie an, für welche $x \in \mathbb{R}$ diese definiert bzw. stetig sind. Sind die Funktionen periodisch und/oder monoton?

(a) $\frac{\sin(x)}{x}$ (b) $\frac{\sin^2(x)}{x}$ (c) $\arctan(x)$ (d) $\frac{x-1}{x^2-1}$

Aufgabe 4:

Sei $f(x) = (x-2)(8-x)$, $x \in [2, 8]$.

- (a) Skizzieren Sie $f(x)$.
 (b) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich an.
 (c) Wo befinden sich die Nullstellen?

Aufgabe 5:

Es sei $y = f(x)$, mit $x = f^{-1}(y)$, wobei $f(x)$ wie in Aufgabe 4 definiert ist.

- (a) Geben Sie die Definitionsbereiche für $x = f^{-1}(y)$.
 (b) Skizzieren Sie $f^{-1}(y)$.

Aufgabe 6:

Zeigen Sie mit Hilfe der Eulerschen Identität $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$ die folgenden Relationen:

(a) $\sin(\phi) = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi})$ (b) $\cos(\phi) = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})$
 (c) $\sin(\phi_1 + \phi_2) = \sin \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_2 \cos \phi_1$ (d) $\cos(\phi_1 + \phi_2) = \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_2 \sin \phi_1$
 (e) $\sin^3 \phi = \frac{1}{4}[3 \sin(\phi) - 3 \sin(3\phi)]$ (f) $\cos^4 \phi = \frac{1}{8}[3 + 4 \cos(2\phi) + \cos(4\phi)]$
 (g) $\sin \phi_1 + \sin \phi_2 = 2 \sin\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$
 (h) $\cos \phi_1 + \cos \phi_2 = 2 \cos\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right)$

Aufgabe 7:

Wiederholung aus der Vorlesung: Geben Sie die inverse Funktion zu

(a) $f(x) = \sin(x)$ (b) $f(x) = \cos(x)$ (c) $f(x) = \tan(x)$

an und skizzieren Sie diese für $-\pi \leq x < \pi$.

Aufgabe 8:

Zeigen Sie, dass $\arcsin(y) + \arccos(y) = \pi/2$ für $-1 \leq y \leq 1$.

Aufgabe 9:

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $2^{(3^5)}$ (b) $(2^3)^5(2^5)^3$ (c) $2^{1+x}3^x$ (d) $\frac{2^{(3^5)}}{2^{(5^3)}}$
 (e) $\frac{4^{2x}}{2^x}$ (f) $\sqrt{9^{x-1}}$ (g) $\sqrt[5]{10^{20x+10}}$ (h) $(10^{-2x})^2$

Aufgabe 10:

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $(\log_a b)(\log_b a)$ (b) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{27}{8}$ (c) $\frac{\log_5 8}{\log_5 4}$

Aufgabe 11

Führen Sie für $P(x)$ und $Q(x)$ die Polynomdivision $P(x)/Q(x)$ aus.

(a) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ $Q(x) = x - 2$

(b) $P(x) = x^3 - x$ $Q(x) = x - 1$

(c) $P(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^2 - \frac{1}{4}x - 1$ $Q(x) = x + 1$

Aufgabe 12:

Vereinfachen Sie durch Partialbruchzerlegung:

(a) $\frac{x^2 + x - 1}{(x-)^3(x-2)}$ (b) $\frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)^3}$

Aufgabe 13:

Bestimmen Sie die Grenzwerte ohne die Anwendung der Regel von l'Hospital.

(Hinweis: Machen Sie sich noch einmal die vorangegangenen Aufgaben bewusst.)

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x-1}$ (b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 7x + 6}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 - 10x + 24}{x-2}$ (d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{\pi - x}$