Übungsblatt 1

Aufgabe 1:

Prüfen Sie die Gültigkeit des Gleichheitszeichens. Es gilt $\{i_l\}$, $\{j_l\} \in \mathbb{N}$; $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\} \subseteq \mathbb{R}$.

(a) $\alpha \sum_{n=i_1}^{i_2} a_n \overset{?}{=} \sum_{n=i_1}^{i_2} (\alpha a_n)$

(b) $\left(\sum_{n=i_1}^{i_2} a_n\right) \cdot \left(\sum_{m=j_1}^{j_2} b_m\right) \overset{?}{=} \sum_{n=i_1}^{i_2} \sum_{m=j_1}^{j_2} (a_n b_m)$

(c) $\sum_{n=i_1}^{i_2} (a_n + b_n) \cdot \left(\sum_{m=j_1}^{j_2} c_m\right) \overset{?}{=} \sum_{n=i_1}^{i_2} \sum_{m=j1}^{j_2} (a_n c_m + b_n c_m)$

(d) $\sum_{n=10}^{20} a_n \overset{?}{=} \sum_{n=100}^{110} a_{n-90}$

(e) $\frac{\sum_{n=i_1}^{i_2} a_n}{\sum_{m=j_1}^{j_2} b_m} \overset{?}{=} \sum_{n=i_1}^{i_2} \sum_{m=j_1}^{j_2} \frac{a_n}{b_m}$

(f) $\left(\sum_{n=i_1}^{i_2} a_n\right)^{i_1} \overset{?}{=} \sum_{n=i_1}^{i_2} (a_n)^{i_1}$

Aufgabe 2:

Stellen Sie die folgenden Reihen mit Hilfe des Summensymbols dar:

(a) $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$ (b) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\pm\ldots$ (c) $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\pm\ldots$

Aufgabe 3:

Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion, wobei $n \in \mathbb{N}$. Benutzen Sie hierfür die Summenregeln, welche in der Vorlesung gegeben wurden.

(a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \overset{!}{=} \frac{n}{n+1}$

(b) $\sum_{k=0}^{n} q^k \overset{!}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ mit $q \neq 1$

(c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overset{!}{=} 2^n$ mit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Hinweis: Benutzen Sie für Teil (c) außerdem, dass $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$, wobei $1 \leqq k < n$ ist. Verdeutlichen Sie sich noch einmal den Zusammenhang mit dem Pascal'schen Dreieck.

Aufgabe 4:

(a) Wie viele rationale Zahlen gibt es zwischen 1 und 2?

(b) Gegeben seien zwei rationale Zahlen. Ist es für eine beliebige Wahl dieser Zahlen möglich, eine irrationale Zahl zu finden, die dazwischen liegt?

Aufgabe 5:

Zeigen Sie durch indirekten Beweis, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Hinweis: Gehen Sie vom Gegenteil aus, also dass $\sqrt{2}$ sich als Bruch zweier ganzer Zahlen p/q ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$) darstellen lassen würde und zeigen Sie, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führen würde.

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie die Lösungen der Ungleichungen bezüglich $x \in \mathbb{R}$.

(a) $2x + 1 < 0$ (b) $x^2 - 3x - 2 < 10 - 2x$

Aufgabe 7:

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

(a) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ (b) $(2+5i)(4-3i)$ (c) $|3-4\mathrm{i}||4+3\mathrm{i}|$

(d) $\left|\dfrac{1}{1+3\mathrm{i}} - \dfrac{1}{1-3\mathrm{i}}\right|$ (e) $\dfrac{7a+(2b+5c)\mathrm{i}}{4a+3c\mathrm{i}}$ (f) $\dfrac{\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4+\mathrm{i}^5}{1+\mathrm{i}}$

Aufgabe 8:

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Polardarstellung $z = \rho e^{i\phi}$ mit $\rho \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$:

(a) i (b) -1 (c) $1+\mathrm{i}$ (d) $-3+4i$

(e) $\dfrac{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}}{2(1+\mathrm{i})}$ (f) $\sqrt{-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}}$

Aufgabe 9:

Welche Kurven bilden die Zahlen $z = u + \mathrm{i}v$, $z \in \mathbb{C}$ in der Gaußschen Zahlenebene, welche durch folgende Bedingungen eingeschränkt sind:

(a) $|z| = 1/2$ (b) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1$ mit $\mathrm{Re}z \neq -1$ (c) $\mathrm{Im}z = 2/3$

Aufgabe 10:

Beweisen Sie durch Nachrechnen die folgenden Rechenregeln.

$z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(a) $zz^* = |z|^2 = |z^*|^2$ (b) $(z_1+z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ (c) $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$

(d) $\mathrm{Re}z = 1/2(z + z^*)$ (e) $\mathrm{Im}z = 1/(2\mathrm{i})(z - z^*)$ (f) $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$