10.4.1 Rechenregeln

$\vec{F}$ und $\vec{G}$ partiell differenzierbare Vektorfelder, f partiell differenzierbares Skalarfeld:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{G}\right) &= \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}, \\ \vec{\nabla} \times \left(f\vec{G}\right) &= \left(\vec{\nabla} f\right) \times \vec{G} + f\,\vec{\nabla} \times \vec{G}.\end{aligned}$$

Exemplarisch: Betrachte i-te Komponente,

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \left(f\vec{G}\right)\right)_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(fG_k) \\ &= \epsilon_{ijk}(\partial_j f)G_k + \epsilon_{ijk} f \partial_j G_k \\ &= \left(\left(\vec{\nabla} f\right) \times \vec{G}\right)_i + f\left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right)_i.\end{aligned}$$

10.4.2 Beispiele und Interpretation

1. Es sei $f(\vec{x})$ ein zweimal stetig differenzierbares Skalarfeld und

   $$\vec{V}(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x})$$

   das zugehörige stetig differenzierbare Gradientenfeld. Dann gilt

   $$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}.$$

   Begründung:

   $$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{V}\right)_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j V_k \\ &= \epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k f\end{aligned}$$

   Satz von Schwarz

   $$= \epsilon_{ijk}\partial_k\partial_j f$$

   Umbenennung $j \leftrightarrow k$

   $$= \epsilon_{ikj}\partial_j\partial_k f$$

   Symmetrie des Epsilonsymbols

   $$= -\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k f$$

Situation $a = -a \Rightarrow a = 0$

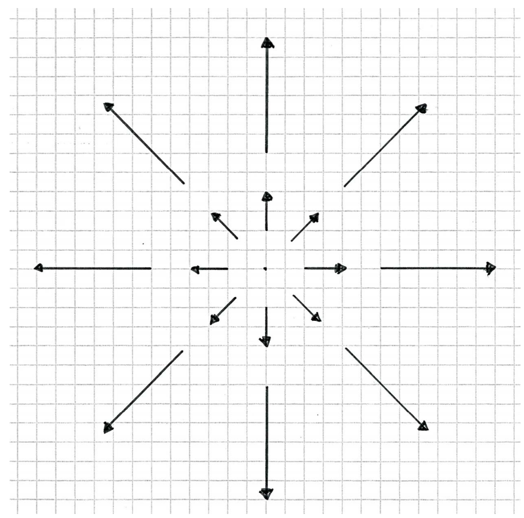
$$= 0.$$

Kurz: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \vec{0}$ für zweifach stetig differenzierbares f.

2. rot $\vec{V}$ heißt das „Wirbelfeld von $\vec{V}$".

   Anschauliche Deutung anhand von Beispielen:

   (a) $\vec{V}(\vec{x}) = \vec{x}$



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{x} = \partial_i x_i = 3,$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{x} = \vec{0},$$

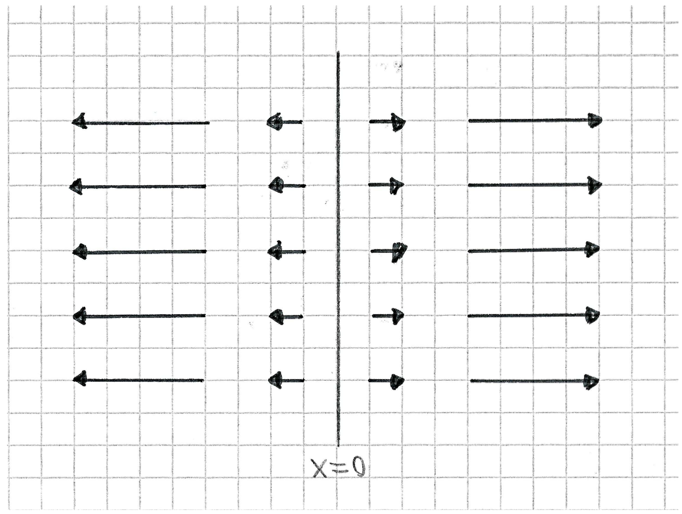
denn

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{x}\right)_i = \epsilon_{ijk} \partial_j x_k = \epsilon_{ijk} \delta_{jk} = \epsilon_{ijj} = 0.$$

Alternativ:

$$\vec{\nabla} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y z - \partial_z y \\ -\partial_x z + \partial_z x \\ \partial_x y - \partial_y x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

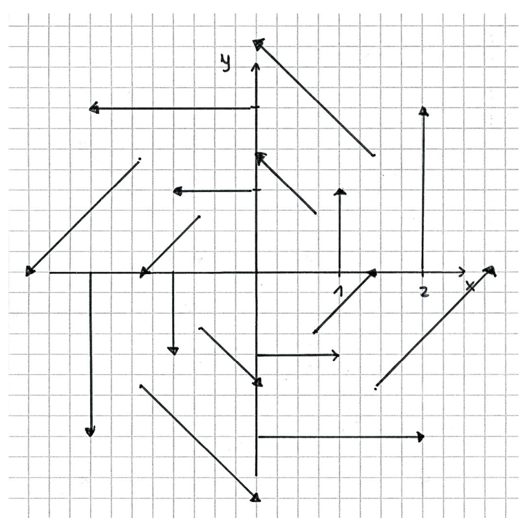
   (b) $\vec{V}(\vec{x}) = x \hat{e}_x$



$$\operatorname{div}\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix} = 1,$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_y 0-\partial_z 0\\-\partial_x 0+\partial_z x\\\partial_x 0-\partial_y x\end{pmatrix} = \vec{0}.$$

(c) $\vec{V}(\vec{x}) = \hat{e}_z\times\vec{x}$



$$\vec{V}(\vec{x}) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot z-1\cdot y\\-0\cdot z+1\cdot x\\0\cdot y-0\cdot x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \partial_x(-y)+\partial_y x+\partial_z 0 = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y 0 - \partial_z x \\ -\partial_x 0 + \partial_z(-y) \\ \partial_x x - \partial_y(-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

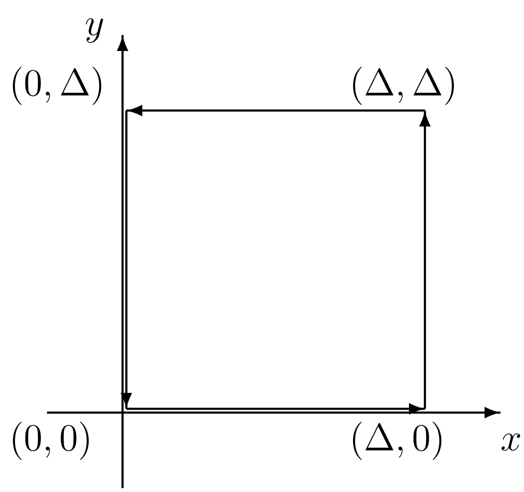
3. Es sei $\vec{V}(\vec{x}) = f(r)\vec{x}$ ein radialsymmetrisches Vektorfeld. Dann gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0}.$$

Begründung:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{V} &= \big(\vec{\nabla} f(r)\big) \times \vec{x} + f(r)\vec{\nabla} \times \vec{x} \\ &= f'(r)\underbrace{\frac{\vec{x}}{r} \times \vec{x}}_{=\vec{0}} + f(r)\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{x}}_{=\vec{0}} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

4. Zur Interpretation betrachten wir ein Elementarquadrat der Seitenlänge Δ in der (x, y)-Ebene am Ursprung.



$$\begin{aligned} \oint_C \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \sum_{i=1}^{4} \int_{C_i} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{x} \\ &= \int_0^\Delta \mathrm{d}x\, V_x(x, 0, 0) + \int_0^\Delta \mathrm{d}y\, V_y(\Delta, y, 0) \\ &\quad + \int_\Delta^0 \mathrm{d}x\, V_x(x, \Delta, 0) + \int_\Delta^0 \mathrm{d}y\, V_y(0, y, 0) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\Delta \mathrm{d}x \left[V_x(x,0,0) - \underbrace{V_x(x,\Delta,0)}_{= V_x(x,0,0) + \Delta \frac{\partial V_x(x,0,0)}{\partial y} + \mathcal{O}(\Delta^2)} \right] \\
&\quad + \int_0^\Delta \mathrm{d}y \left[\underbrace{V_y(\Delta,y,0)}_{= V_y(0,y,0) + \Delta \frac{\partial V_y(0,y,0)}{\partial x} + \mathcal{O}(\Delta^2)} - V_y(0,y,0)\right] \\
&= -\Delta \int_0^\Delta \mathrm{d}x \underbrace{\frac{\partial V_x(x,0,0)}{\partial y}}_{= \frac{\partial V_x(0,0,0)}{\partial y} + \mathcal{O}(x)}
\end{aligned}
$$

$\int_0^\Delta \mathrm{d}x\, \mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(\Delta^2)$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \Delta \int_0^\Delta \mathrm{d}y \, \frac{\partial V_y(0,y,0)}{\partial x} + \mathcal{O}(\Delta^3) \\
&= -\Delta^2 \frac{\partial V_x(0,0,0)}{\partial y} + \Delta^2 \frac{\partial V_y(0,0,0)}{\partial x} + \mathcal{O}(\Delta^3) \\
&= \Delta^2 \, \hat{e}_z \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{V}(0,0,0)\right) + \mathcal{O}(\Delta^3) \\
&\approx \int_{\Delta F} \mathrm{d}\vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}).
\end{aligned}
$$

Betrachte nun $\Delta F = \Delta^2 \to 0$:

$$
(\vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{0}))_z = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{C_\square} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{x}.
$$

Verallgemeinerung für beliebigen Ort und beliebige Orientierung des Flächenstücks:

$$
\hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial \Delta F} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{x}.
$$

Die Rotation in Richtung $\hat{n}$ ist gleich der Zirkulation längs der Randkurve $\partial\Delta F$ einer orientierten Fläche $\Delta\vec{F} = \Delta F \hat{n}$ geteilt durch die Fläche im Grenzfall $\Delta F \to 0$. Man nennt diese Flächendichte der Zirkulation auch *Wirbelstärke*.

10.5 Zusammenstellung von Rechenregeln der Vektoranalysis

Es seien f und g hinreichend oft (i. Allg. stetig oder zweimal stetig) differenzierbare skalare Felder und $\vec{F}$ und $\vec{G}$ entsprechende Vektorfelder.

1. Summenregeln

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}(f+g) &= \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g, \\
\vec{\nabla} \cdot (\vec{F}+\vec{G}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}, \\
\vec{\nabla} \times (\vec{F}+\vec{G}) &= \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}.
\end{aligned}
$$

2. Produktregeln

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}(fg) &= (\vec{\nabla} f)g + f\vec{\nabla} g, \\
\vec{\nabla} \cdot (f\vec{G}) &= (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{G} + f\vec{\nabla} \cdot \vec{G}, \\
\vec{\nabla} \times (f\vec{G}) &= (\vec{\nabla} f) \times \vec{G} + f\vec{\nabla} \times \vec{G}, \\
\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) &= (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}), \\
\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) &= \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G}), \\
\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) &= (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + \vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) - \vec{G}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}).
\end{aligned}
$$

3. Zweite Ableitungen

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) &= 0, \\
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) &= \vec{0}, \\
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F}.
\end{aligned}
$$

10.6 Ableitungen in sphärischen und Zylinderkoordinaten

In Abhängigkeit von der Geometrie des Problems sind krummlinige Koordinaten geeigneter für die Beschreibung von (Vektor-)Feldern.

Hier: Beschränkung auf Zylinder- und Kugelkoordinaten.

Umschreiben von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator

Illustration der „Brechstangenmethode“ anhand des Beispiels eines Skalarfeldes

$$f(x,y,z) = g(\rho,\varphi,z) = h(r,\theta,\varphi).$$

Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}
x &= \rho\cos(\varphi),\\
y &= \rho\sin(\varphi),\\
\rho &= \sqrt{x^2+y^2},\\
\varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{y}\right),\\
\frac{\partial\rho}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2x = \frac{x}{\rho} = \cos(\varphi),\\
\frac{\partial\rho}{\partial y} &= \sin(\varphi),\\
\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y} = -\frac{y}{y^2+x^2} = -\frac{\sin(\varphi)}{\rho},\\
\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x} = \frac{\cos(\varphi)}{\rho}.
\end{aligned}$$

Verwende die Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z\\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\cancel{\frac{\partial z}{\partial x}}\right)\hat{e}_x\\
&\quad + \left(\frac{\partial g}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\cancel{\frac{\partial z}{\partial y}}\right)\hat{e}_y\\
&\quad + \left(\frac{\partial g}{\partial\rho}\cancel{\frac{\partial\rho}{\partial z}} + \frac{\partial g}{\partial\varphi}\cancel{\frac{\partial\varphi}{\partial z}} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z}\right)\hat{e}_z\\
&= \left(\cos(\varphi)\frac{\partial g}{\partial\rho} - \frac{\sin(\varphi)}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right)(\cos(\varphi)\hat{e}_\rho - \sin(\varphi)\hat{e}_\varphi)
\end{aligned}$$

$$+ \left(\sin(\varphi)\frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{\cos(\varphi)}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)(\sin(\varphi)\hat{e}_\rho + \cos(\varphi)\hat{e}_\varphi)$$
$$+ \frac{\partial g}{\partial z}\hat{e}_z$$

$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$

$$= \frac{\partial g}{\partial \rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial g}{\partial z}\hat{e}_z.$$

Analog für Kugelkoordinaten (aber aufwändiger). Analog für Divergenz, Rotation und Laplace-Operator.

Zusammenfassung:

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= g(\rho,\varphi,z) = h(r,\theta,\varphi),\\
\vec{V} &= V_x(x,y,z)\hat{e}_x + V_y(x,y,z)\hat{e}_y + V_z(x,y,z)\hat{e}_z\\
&= G_\rho(\rho,\varphi,z)\hat{e}_\rho + G_\varphi(\rho,\varphi,z)\hat{e}_\varphi + G_z(\rho,\varphi,z)\hat{e}_z\\
&= H_r(r,\theta,\varphi)\hat{e}_r + H_\theta(r,\theta,\varphi)\hat{e}_\theta + H_\varphi(r,\theta,\varphi)\hat{e}_\varphi.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z\\
&= \frac{\partial g}{\partial \rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial g}{\partial z}\hat{e}_z\\
&= \frac{\partial h}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial h}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi,\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{V} &= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\\
&= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho G_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial G_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial G_z}{\partial z}\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 H_r) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin(\theta)H_\theta) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi},\\
\vec{\nabla}\times\vec{V} &= \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\hat{e}_x + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\hat{e}_y + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\hat{e}_z\\
&= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial G_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial G_\varphi}{\partial z}\right)\hat{e}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial \rho}\right)\hat{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho G_\varphi) - \frac{\partial G_\rho}{\partial \varphi}\right)\hat{e}_z\\
&= \frac{1}{r\sin(\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin(\theta)H_\varphi) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi}\right]\hat{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\right]\hat{e}_\theta\\
&\quad + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta}\right]\hat{e}_\varphi,\\
\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\\
&= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial g}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial h}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial h}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2}.
\end{aligned}
$$