Name:

Übungsgruppe:

Bearbeitungszeit:

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

S. Scherer und H. C. Lange

Abgabe: 2. Februar 2018

Mathematische Rechenmethoden 2 (B.Ed.) WiSe 2017/2018
Übung 13

1. **[5]** Berechnen Sie die folgenden Integrale:

   (a)
$$\int_2^6 \mathrm{d}x\,(3x^2 - 2x - 1)\delta(x-3),$$

   (b)
$$\int_0^5 \mathrm{d}x\,\cos(x)\delta(x-\pi),$$

   (c)
$$\int_0^3 \mathrm{d}x\,x^3\delta(x+1).$$

2. **[4]** Es sei $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Bestimmen Sie $\delta(f(x))$.

3. **[4]** Bestimmen Sie $\delta(\sin(x))$.

4. **[6]** Die Funktion
$$x(t) = \frac{a}{\omega}H(t)\sin(\omega t)$$
mit der Heaviside-Sprungfunktion $H(t)$ löst die inhomogene Schwingungsgleichung
$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$$
für einen „Kraftstoß“ zur Zeit $t = 0 : f(t) = a\delta(t)$.

   Verifizieren Sie diese Aussage durch direktes Einsetzen in die Schwingungsgleichung und Verwendung der Eigenschaften der Deltafunktion.

   Hinweise: Für ein stetig differenzierbares g dürfen Sie $\dot{\delta}(t)g(t) \to -\delta(t)\dot{g}(t)$ ersetzen. Für ein stetiges g dürfen Sie $\delta(t)g(t) \to \delta(t)g(0)$ ersetzen.

5. **[4]** Es sei
$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Wie lautet $\delta_n(0)$? Bestimmen Sie
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\delta_n(x).$$

6. **[3]** Bestimmen Sie folgendes Integral:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x \, (r^2 + \vec{x} \cdot \vec{a} + a^2)\delta(\vec{x} - \vec{a}),$$

wobei $r = |\vec{x}|$ und $\vec{a}$ ein konstanter Vektor mit Betrag a ist.

7. **[4]** In Kugelkoordinaten sei die Ladungsdichte

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \sigma\delta(r - R), \quad R > 0,$$

gegeben. Bestimmen Sie σ dergestalt, dass sich als Gesamtladung Q ergibt. Welche Dimension besitzt σ?