1	2	3	$\sum$

Name:

Übungsgruppe:

Bearbeitungszeit:

S. Scherer und H. C. Lange

Abgabe: 26. Januar 2018

Mathematische Rechenmethoden 2 (B.Ed.) WiSe 2017/2018
Übung 12

1. **[10]** Gegeben sei das skalare Feld

$$\phi(x,y,z) = x^2 + 4xy + 2yz^2.$$

Überprüfen Sie den Fundamentalsatz für den Gradienten,

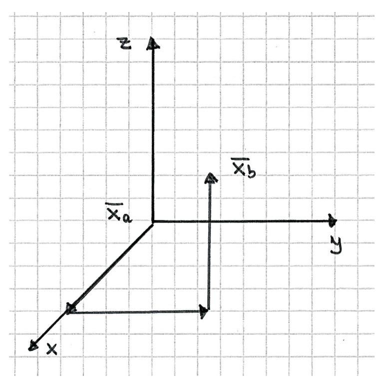
$$\int_C \left(\vec{\nabla}\phi\right) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \phi(\vec{x}_b) - \phi(\vec{x}_a),$$

für

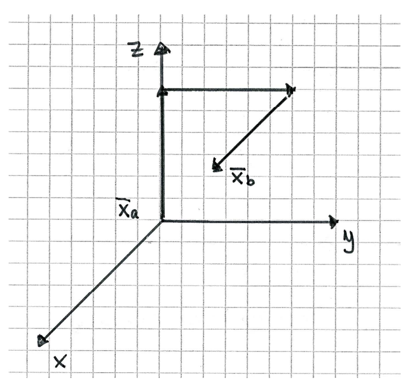
$$\vec{x}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die 3 Wege

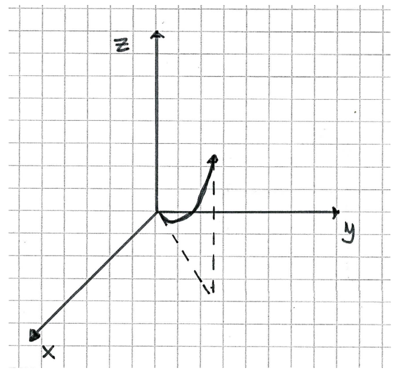
(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:



(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:



(c) entlang der Parabel $z = x^2$, $y = x$:



2. **[9]** Gegeben sei das radialsymmetrische Vektorfeld $\vec{V}(\vec{x}) = f(r)\vec{x}$ mit stetigem f und $r = |\vec{x}|$. Überprüfen Sie den Satz von Gauß,

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \mathrm{d}^3 x = \oint_F \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{F},$$

für den Fall, dass V die Kugel um den Ursprung mit Radius R ist, indem Sie beide Seiten der Gleichung separat berechnen.

Tipp: $\mathrm{d}\vec{F} = \hat{e}_r R^2 \sin(\theta) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$.

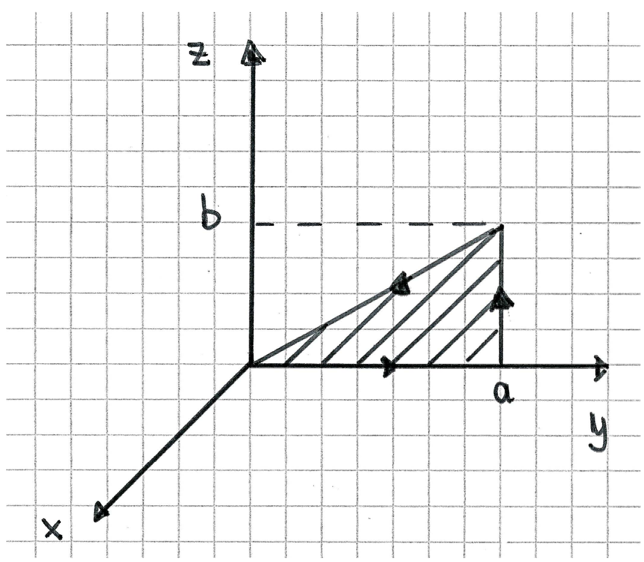
3. **[11]** Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ 2yz \\ 3xz \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie den Satz von Stokes,

$$\oint_{\partial F} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_F (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \mathrm{d}\vec{F},$$

für das folgende Gebiet:



Tipp: Parametrisierung des Flächenintegrals für ein nichtrechteckiges Integrationsgebiet, siehe MRM 1, Abschnitt 4.2.