1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

Name:

Übungsgruppe:

Bearbeitungszeit:

S. Scherer und H. C. Lange

Abgabe: 19. Januar 2018

Mathematische Rechenmethoden 2 (B.Ed.) WiSe 2017/2018
Übung 11

1. [**2**] Es seien f und g zweifach stetig differenzierbare skalare Felder. Wir definieren das Vektorfeld $\vec{V} := f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f$. Zeigen Sie
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = f\Delta g - g\Delta f.$$

2. [**6**] Gegeben seien die folgenden Skalarfelder:
$$f_1(\vec{x}) = x^2 + 2xy + 3z + 4, \quad f_2(\vec{x}) = \sin(x)\sin(y)\sin(z), \quad f_3(\vec{x}) = e^{-5x}\sin(4y)\cos(3z).$$
Bestimmen Sie jeweils Δf_i.

3. [**6**] Als Anwendung des Laplace-Operators betrachten wir die freie stationäre Schrödinger-Gleichung,
$$-\frac{\hbar^2\Delta}{2m}\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}), \quad E \geq 0.$$
Wir betrachten als Lösungsansatz
$$\psi(\vec{x}) = e^{i\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}}.$$
Bestimmen Sie $\Delta\psi(\vec{x})$ und stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der Energie E und $\vec{p}$ her, so dass die Schrödinger-Gleichung erfüllt ist.

4. [**6**] Gegeben seien die folgenden Vektorfelder:
$$\vec{V}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 3xz^2 \\ 2xz \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} xy \\ 2yz \\ 3xz \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_3(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy + z^2 \\ 2yz \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie jeweils die Rotation.

5. [**4**] Es sei $\vec{V}$ ein zweifach stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie, dass die Divergenz der Rotation von $\vec{V}$ überall verschwindet, d. h. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$.

6. Es sei
$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{x^2 + y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) [**3**] Bestimmen Sie $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$.

(b) **[3]** Zeigen Sie, dass $\vec{B}$ die Rotation von

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

ist.

Bemerkung: Das Vektorfeld $\vec{B}$ stellt bis auf einen Faktor das von einem unendlich langen, geradlinigen, stromdurchflossenen Leiter erzeugte Magnetfeld dar. Das Vektorfeld $\vec{A}$ ist ein zugehöriges Vektorpotenzial.

Wenn Sie noch mehr üben möchten, dann untersuchen Sie die folgende Aufgabe.

7. **[15]** Leiten Sie analog zur Vorlesung den Ausdruck für den Gradienten in Kugelkoordinaten her:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= h(r,\theta,\varphi), \\ \vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z \\ &= \frac{\partial h}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial h}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Hinweise:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right), \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{y}\right), \\ (\arctan(x))' &= \frac{1}{1+x^2}, \\ (\operatorname{arccot}(x))' &= -\frac{1}{1+x^2}, \\ (\arccos(x))' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \hat{e}_x &= \sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{e}_r + \cos(\theta)\cos(\varphi)\hat{e}_\theta - \sin(\varphi)\hat{e}_\varphi, \\ \hat{e}_y &= \sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{e}_r + \cos(\theta)\sin(\varphi)\hat{e}_\theta + \cos(\varphi)\hat{e}_\varphi, \\ \hat{e}_z &= \cos(\theta)\hat{e}_r - \sin(\theta)\hat{e}_\theta. \end{aligned}$$