Name:

Übungsgruppe:

Bearbeitungszeit:

1	2	3	4	$\sum$

S. Scherer und H. C. Lange

Abgabe: 8. Dezember 2017

Mathematische Rechenmethoden 2 (B.Ed.) WiSe 2017/2018
Übung 7

1. Gegeben sei die Parameterdarstellung der archimedischen Spirale:

$$\vec{\alpha} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^{(2)} \quad \text{mit} \quad t \mapsto \vec{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}.$$

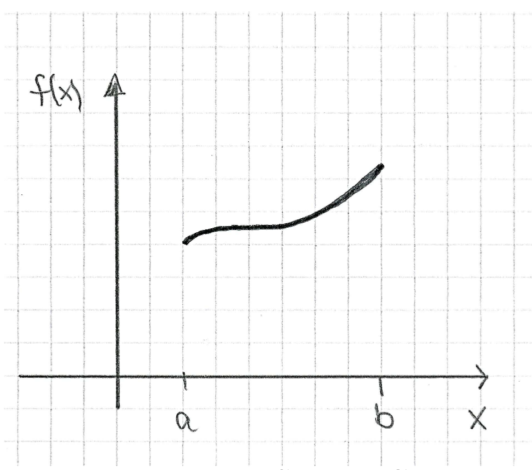
   (a) **[3]** Bestimmen Sie den Tangentialvektor $\dot{\vec{\alpha}}(t)$ und berechnen Sie $\dot{\vec{\alpha}}(t)$ für $t = 2\pi n$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$.

   (b) **[1]** Skizzieren Sie die archimedische Spirale in der (x, y)-Ebene.

   (c) **[3]** Berechnen Sie den Betrag $|\dot{\vec{\alpha}}(t)|$ des Tangentialvektors.

   (d) **[3]** Berechnen Sie die Kurvenlänge von $t_1 = 0$ bis $t_2 = T$.
   Tipp: Für $X = x^2 + a^2$ gilt $\int \mathrm{d}x\sqrt{X} = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{X} + a^2 \ln\left(x + \sqrt{X}\right)\right]$.

2. **[5]** Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$.



Zeigen Sie dass die Bogenlänge s durch

$$s = \int_a^b \mathrm{d}x\sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

gegeben ist.

Hinweis: Interpretieren Sie den Graphen von f als Kurve in der (x, y)-Ebene und parametrisieren Sie die Kurve durch

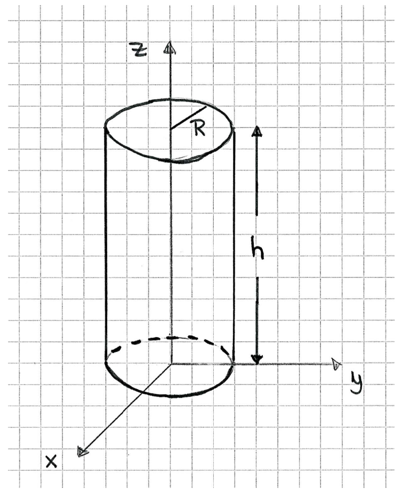
$$t \mapsto \vec{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

3. Wir betrachten einen Zylinder mit Höhe h und Radius R (siehe Skizze).

   (a) **[5]** Wir parametrisieren den Zylinderdeckel durch

$$(u_1, u_2) := (\rho, \varphi) \in [0, R] \times [0, 2\pi],$$
$$\vec{\Phi}(\rho, \varphi) := \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die beiden Tangentenvektoren $\vec{t}_1 = \frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial\rho}$ und $\vec{t}_2 = \frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial\varphi}$. Drücken Sie das Ergebnis mithilfe der Einheitsvektoren $\hat{e}_\rho$ und $\hat{e}_\varphi$ aus (siehe MRM1, Abschnitt 1.4.2). Berechnen Sie $\vec{t}_1 \times \vec{t}_2$ und bestimmen Sie den Normaleneinheitsvektor dergestalt, dass er vom Volumen wegzeigt.



(b) **[3]** Parametrisieren Sie nun den Zylinderboden und wiederholen Sie die Schritte aus (a).

(c) **[7]** Nun zum Zylindermantel: Parametrisieren Sie den Zylindermantel mithilfe von

$$\begin{aligned}(u_1, u_2) &:= (\varphi, z) \in [0, 2\pi] \times [0, h],\\ \vec{\Phi}(\varphi, z) &= \quad ?\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Tangentenvektoren $\vec{t}_1 = \frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial\varphi}$ und $\vec{t}_2 = \frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial z}$. Drücken Sie das Ergebnis mithilfe von $\hat{e}_z$ und $\hat{e}_\varphi$ aus. Berechnen Sie $\vec{t}_1 \times \vec{t}_2$ und bestimmen Sie den nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor.

Fazit: Auf der Zylinderdecke und dem Zylinderboden lautet für alle Punkte der Fläche der Normaleneinheitsvektor $\hat{e}_z$ bzw. $-\hat{e}_z$. Auf dem Mantel lautet der Normaleneinheitsvektor $\hat{n} = \hat{e}_\rho = \cos(\varphi)\hat{e}_x + \sin(\varphi)\hat{e}_y$ und hängt somit vom Winkel φ ab.

Wenn Sie noch mehr üben möchten, dann untersuchen Sie die folgende Aufgabe.

4. **[6]** Gegeben seien die beiden Skalarfelder

$$\begin{aligned}f_1(x, y, z) &= (x^2 + y^2)z,\\ f_2(x, y, z) &= x(x^2 + y^2 + z^2)\end{aligned}$$

in kartesischen Koordinaten. Drücken Sie die Skalarfelder durch Funktionen in Zylinderkoordinaten, $g_i(\rho, \varphi, z)$, und in Kugelkoordinaten, $h_i(r, \theta, \varphi)$, aus.

Beispiel:

$$\begin{aligned}g_1(\rho, \varphi, z) &= f_1(x(\rho, \varphi, z), y(\rho, \varphi, z), z(\rho, \varphi, z))\\ &= \left[\big(\rho\cos(\varphi)\big)^2 + \big(\rho\sin(\varphi)\big)^2\right]z = \rho^2\left[\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right]z = \rho^2 z.\end{aligned}$$