1	2	3	4	$\sum$

Name:

Übungsgruppe:

Bearbeitungszeit:

S. Scherer und H. C. Lange

Abgabe: 1. Dezember 2017

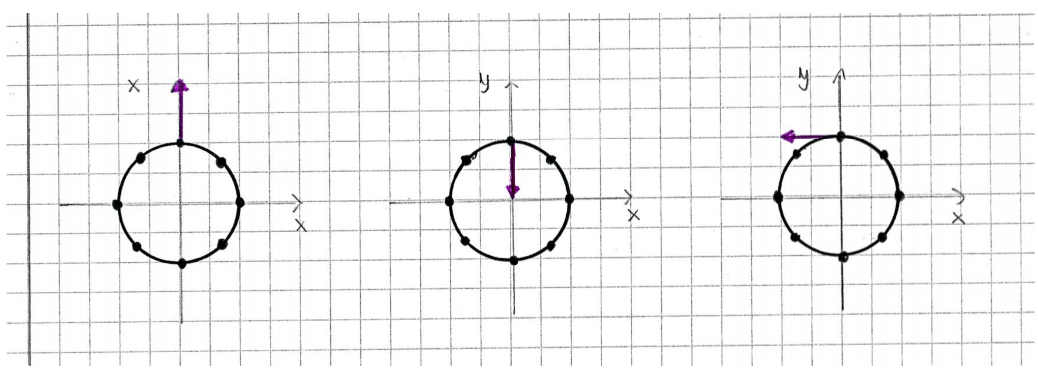
Mathematische Rechenmethoden 2 (B.Ed.) WiSe 2017/2018
Übung 6

1. Gegeben seien die Vektorfelder

$$\vec{V}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_3(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) **[3]** Bestimmen Sie jeweils den Betrag $|\vec{V}_i(\vec{x})|$.

   (b) **[6]** Tragen Sie an den Punkten jeweils den zu $\vec{V}_i$ gehörigen Pfeil ein.



2. **[8]** Bestimmen Sie für die folgenden Vektorfelder $\vec{V}_i(\vec{x})$ jeweils den Betrag $|\vec{V}_i(\vec{x})|$.

$$\vec{V}_1(\vec{x}) = -\gamma \frac{\vec{x}}{r^3}, \quad r = |\vec{x}|, \quad \gamma > 0,$$

$$\vec{V}_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y^2 \\ z^3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{V}_3(\vec{x}) = \vec{x} \times \vec{B}, \quad \vec{B} = B\hat{e}_x,$$

$$\vec{V}_4(\vec{x}) = f(r)\frac{\vec{x}}{r}, \quad r = |\vec{x}|.$$

3. In einem kartesischen Koordinatensystem KS sei ein Vektorfeld $\vec{A}$ gegeben durch

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{x}$$

mit konstantem Vektor

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \\ B_3 \end{pmatrix}.$$

Ein weiteres kartesisches Koordinatensystem KS′ sei relativ zu KS um die gemeinsame 3-Achse um den Winkel φ gedreht, so dass

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\, D} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gilt.

(a) **[3]** Berechnen Sie zuächst

$$A_1(x_1, x_2, x_3), \quad A_2(x_1, x_2, x_3) \quad \text{und} \quad A_3(x_1, x_2, x_3).$$

(b) **[4]** Drücken Sie x_1, x_2 und x_3 durch x_1', x_2' und x_3' aus, und setzen Sie die Ergebnisse in die A_i ein.
Beispiel:

$$A_1 = -\frac{1}{2}x_2 B_3 = -\frac{1}{2}\big(\sin(\varphi)x_1' + \cos(\varphi)x_2'\big)B_3.$$

(c) **[6]** Zeigen Sie schließlich mithilfe von

$$A_i'(\vec{x}') = D_{ij}A_j(x_1(x_1', x_2', x_3'), x_2(x_1', x_2', x_3'), x_3(x_1', x_2', x_3')),$$

dass

$$\vec{A}'(\vec{x}') = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin(\varphi)x_3' B_1 - x_2' B_3 \\ x_1' B_3 - \cos(\varphi)x_3' B_1 \\ \big(\sin(\varphi)x_1' + \cos(\varphi)x_3'\big)B_1 \end{pmatrix}$$

gilt.

Interpretation: Bei $\vec{A}(\vec{x})$ handelt es sich um ein sogenanntes Vektorpotenzial. Aus dem Vektorpotenzial lässt sich mithilfe der Rotation (siehe Abschnitt 9.4) das Magnetfeld zu $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ berechnen.

Wenn Sie noch mehr üben möchten, dann untersuchen Sie die folgende Aufgabe.

4. **[6]** Gegeben sei die Differenzialgleichung

$$\ddot{x} - \alpha x = 0, \quad \alpha > 0.$$

Wieviele unabhängige Lösungen erwarten Sie. Versuchen Sie es mit dem Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ und bestimmen Sie geeignete Werte für λ. Wie lautet die allgemeine Lösung?