1	2	3	$\sum$

Name:

Übungsgruppe:

Bearbeitungszeit:

S. Scherer und H. C. Lange Abgabe: 24. November 2017

Mathematische Rechenmethoden 2 (B.Ed.) WiSe 2017/2018
Übung 5

1. Gegeben sei die DGL für ein kräftefreies Teilchen mit Masse m:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{0}.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t.$$

Bestimmen Sie $\vec{r}_0$ und $\vec{v}_0$ für die folgenden Anfangs- bzw. Randbedingungen. Drücken Sie $\vec{r}(t)$ explizit durch die jeweiligen Anfangs- bzw. Randwerte aus.

(a) **[2]**

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \dot{\vec{r}}(t_1) = \vec{v}_1.$$

(b) **[5]**

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2, \quad t_1 \neq t_2.$$

Was passiert für den Fall $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$?

(c) **[2]**

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \dot{\vec{r}}(t_2) = \vec{v}_2.$$

(d) **[3]**

$$\dot{\vec{r}}(t_1) = \vec{v}_1, \quad \dot{\vec{r}}(t_2) = \vec{v}_2, \quad t_1 \neq t_2.$$

Unter welcher Bedingung ist dieses Randwertproblem lösbar? Sofern es lösbar ist, ist die Lösung eindeutig?

2. Auf eine Masse m wirke die Schwerkraft $\vec{F} = -mg\hat{e}_z$. Die Erdoberfläche sei durch die (x, y)-Ebene beschrieben. Die positive z-Achse zeige in vertikale Richtung nach oben. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich die Masse bei $\vec{r}_0 = (0, 0, z_0)$ mit $z_0 > 0$ und habe die Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = (v_x, 0, 0)$ mit $v_x > 0$.

(a) **[1]** Wie lautet die Bewegungsgleichung?

(b) **[2]** Wie lautet die Lösung der Bewegungsgleichung mit den genannten Anfangsbedingungen?

(c) **[2]** Wie lange dauert es, bis die Masse auf den Boden gefallen ist?

(d) **[1]** Wo trifft die Masse auf dem Boden auf?

3. **[12]** In einem kartesischen Koordinatensystem KS seien drei Skalarfelder ϕ_i gegeben durch

$$\phi_1(x, y, z) = x^2,$$
$$\phi_2(x, y, z) = xyz,$$
$$\phi_3(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Ein weiteres kartesisches Koordinatensystem KS$'$ sei relativ zu KS um die gemeinsame 2-Achse um den Winkel φ gedreht, so dass

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

gilt. Bestimmen Sie $\phi_i'(x', y', z')$, $i = 1, 2, 3$. Ist eines der Skalarfelder radialsymmetrisch?