Name:	1	2	3	4	5	6	7	6	9	10	$\sum$

Übungsgruppe:

Bearbeitungszeit:

S. Scherer und H. C. Lange — Abgabe: 17. November 2017

Mathematische Rechenmethoden 2 (B.Ed.) WiSe 2017/2018
Übung 4

Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens mit Masse m und Ladung $q > 0$ in einem konstanten magnetischen Feld $\vec{B}$ in z-Richtung,

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}, \quad B_0 > 0.$$

1. **[5]** Leiten Sie aus der Newton'schen Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_L$ mit der Lorentz-Kraft $\vec{F}_L = q\dot{\vec{x}} \times \vec{B}$ die folgenden DGLn her:

$$\ddot{x} - \frac{qB_0}{m}\dot{y} = 0, \tag{1}$$
$$\ddot{y} + \frac{qB_0}{m}\dot{x} = 0, \tag{2}$$
$$\ddot{z} = 0. \tag{3}$$

2. **[2]** Wir definieren die sogenannte Zyklotronfrequenz $\omega_c := \frac{qB_0}{m}$ und schreiben Gl. (2) um zu

$$\ddot{y} = -\omega_c \dot{x}. \tag{4}$$

Integrieren Sie die DGL (Stammfunktion suchen), um einen Ausdruck für $\dot{y}$ zu erhalten.

3. **[2]** Setzen Sie das Ergebnis für $\dot{y}$ in Gl. (1) ein. Durch Umstellen ergibt sich die DGL

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = \omega_c C, \tag{5}$$

wobei C die Integrationskonstante aus 2. ist.

4. **[3]** Geben Sie die allgemeine Lösung $x_h(t)$ der homogenen DGL $\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0$ an.

5. **[2]** Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist von der Form

$$x(t) = x_s(t) + x_h(t).$$

Zeigen Sie durch Einsetzen, dass

$$x_s = \frac{C}{\omega_c}$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL ist.

6. **[3]** In 2. sollten Sie als Ergebnis

$$\dot{y} = -\omega_c x + C \tag{6}$$

erhalten haben. Setzen Sie nun in Gl. (6) die allgemeine Lösung für $x(t)$ aus 5. ein und integrieren Sie das Resultat.

7. **[4]** Die Gln. (1) und (2) stellen ein System aus zwei DGLn zweiter Ordnung dar. Die allgemeine Lösung erfordert (daher) $2 \cdot 2 = 4$ freie Konstanten,

$$x(t) = A_x \cos(\omega_c t) + B_x \sin(\omega_c t) + \frac{C}{\omega_c},$$
$$y(t) = -A_x \sin(\omega_c t) + B_x \cos(\omega_c t) + D.$$

Bestimmen Sie A_x, B_x, C und D mithilfe der Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $y(0) = y_0$ und $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$.

8. **[4]** Somit erhalten wir als Lösungen

$$x(t) = x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega_c} - \frac{\dot{y}_0}{\omega_c}\cos(\omega_c t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t), \tag{7}$$
$$y(t) = y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega_c} + \frac{\dot{y}_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_c}\cos(\omega_c t). \tag{8}$$

Verifizieren Sie durch explizites Einsetzen, dass die DGLn (1) und (2) erfüllt sind.

9. **[3]** Nun zur Interpretation der Bewegung.

Ein Kreis mit dem Mittelpunkt im Punkt $P = (x_z, y_z)$ (z für Zentrum) und dem Radius R hat die Gleichung

$$(x - x_z)^2 + (y - y_z)^2 = R^2.$$

In unserem Fall gilt mit $x(t)$ und $y(t)$ aus Gln. (7) und (8):

$$\left[x - \left(x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega_c}\right)\right]^2 = \left[\frac{\dot{x}_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t) - \frac{\dot{y}_0}{\omega_c}\cos(\omega_c t)\right]^2,$$
$$\left[y - \left(y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega_c}\right)\right]^2 = \left[\frac{\dot{y}_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_c}\cos(\omega_c t)\right]^2.$$

Verifizieren Sie, dass

$$R^2 = \frac{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}{\omega_c^2}$$

gilt.

Bewegungstypen:

- $z(t) = \text{konst.} \Rightarrow$ Kreisbahn
- $z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t$ mit $\dot{z}_0 \neq 0 \Rightarrow$ Helix oder Schraubenlinie
- Kreisfrequenz: $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$
- Radius:

$$R = \frac{\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}}{\omega_c} = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}\,\frac{m}{qB_0}$$

10. **[2]** Wie unterscheidet sich die Kreisbewegung bei einer Umkehrung des Vorzeichens der Ladung (begründe kurz)?