	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Name:							

Übungsgruppe:

Bearbeitungszeit:

S. Scherer und H. C. Lange

Abgabe: 10. November 2017

Mathematische Rechenmethoden 2 (B.Ed.) WiSe 2017/2018
Übung 3

1. **[5]** Es sei $z = x + iy$ und
$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$
Bestimmen Sie für
$$f(z) = e^z$$
die Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$.
Hinweis: $e^z = e^{x+iy}$, außerdem $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

2. **[4]** Zeigen Sie, dass $\left(e^{ix}\right)^* = e^{-ix}$ für jedes reelle x.
Hinweis: $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$.

3. **[6]** Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichungen:
$$\dot{x}(t) = a + bt,$$
$$\dot{x}(t) = a\cos(\omega t),$$
$$\dot{x}(t) = ae^{\lambda t}.$$

4. **[9]** Lösen Sie das Anfangswertproblem
$$\dot{x}(t) = \frac{1}{t}x(t) + t, \quad x(1) = 1,$$
für $t \in]0,\infty[$. Verifizieren Sie durch explizites Einsetzen, dass Ihre Lösung die DGL und die Anfangsbedingung erfüllt.
Hinweis: $\exp(-\ln(t)) = \frac{1}{\exp(\ln(t))} = \frac{1}{t}$ für $t > 0$.

5. **[6]** Gegeben sei die DGL
$$\dot{x} = \frac{2t}{1+t^2}x^2.$$
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.
Hinweis: Die DGL ist vom Typ $\dot{x} = f(t)g(x)$. Verwenden Sie die Methode der Trennung der Variablen.

Wenn Sie noch mehr üben möchten, dann untersuchen Sie die folgende Aufgabe.

6. **[10]** Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{t}x(t) + t, \quad x(1) = C, \quad t > 0,$$

mithilfe eines Potenzreihenansatzes

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

Bestimmen Sie dazu zunächst $\dot{x}$ durch gliedweise Differenziation. Setzen Sie das Ergebnis in die DGL ein und multiplizieren Sie die resultierende Gleichung mit t. Schreiben Sie das Resultat in der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k = 0.$$

Verwenden Sie nun, dass die letzte Gleichung für alle Koeffizienten $b_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$ impliziert. Begründen Sie nun das folgende Resultat:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &\quad \text{beliebig}, \\ a_2 &= 1, \\ a_k &= 0 \text{ für } k \geq 3. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie schließlich a_1 mithilfe der Anfangsbedingung.