5.2.5 Differenziation*

Definition: Die Funktion $f : U \subseteq \mathbb{C}$ sei in einer Umgebung des Punktes z_0 definiert. Die Funktion f ist genau dann im Punkt z_0 **komplex differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existiert. Beachte: h ist komplexe Zahl.

$$\frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z} := f'(z_0)$$

heißt Ableitung von f in z_0.

Hauptsatz von Cauchy und Riemann: Sei $z = x + iy$. Eine im Gebiet G definierte komplexe Funktion

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ist in $z \in G$ genau dann differenzierbar, wenn $u(x, y)$ und $v(x, y)$ stetige partielle Ableitungen nach x und y besitzen und den Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

genügen. Die Ableitung von f nach z berechnet man dann nach

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Beispiel: Komplexe e-Funktion

$$\begin{aligned} f(z) &= e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y) \quad \Rightarrow \\ u(x, y) &= e^x\cos(y), \\ v(x, y) &= e^x\sin(y), \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x\cos(y) = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x\sin(y) = -\frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y) = e^z, \end{aligned}$$

d. h. wir erhalten dasselbe Resultat, wie wir es für eine *reelle* Variable erwartet hätten.

Definition: Eine Funktion $f(z)$ heißt im Punkt $z = z_0$ *analytisch* oder *holomorph* oder *regulär*, wenn sie in einer Umgebung von z_0 differenzierbar ist.

Satz: Die Funktion $f(z)$ ist genau dann in $z = z_0$ analytisch, wenn sie durch eine in einem Kreis um z_0 konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dargestellt werden kann.

Für alle Funktionen, die sich in Potenzreihen entwickeln lassen, stimmen die reellen und komplexen Ableitungen überein.
Beispiel: $f(z) := e^z$

$$f(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \quad \Rightarrow$$
$$f'(z) = 0 + 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots = e^z \ \forall \ z \in \mathbb{C}.$$