Übungsklausur
Theoretische Physik 3 : QM SS2017
Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

7.07.2017

Aufgabe 1 (20 Punkte). Streuung an einer Klippe.

Ein Teilchen mit Masse m und kinetischer Energie $E_{kin} > 0$ nähert sich einer Stufe, bei der das Potential plötzlich auf $-V_0$ sinkt (Figure 1).

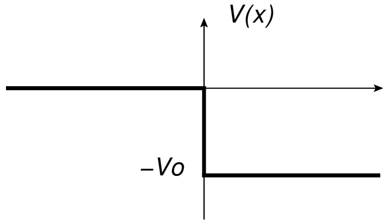

Figure 1: **Streuung an einer Klippe.**

a) **(14 Punkte)** Gegeben $E_{kin} = V_0/3$, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen zurückreflektiert wird?

b) **(6 Punkte)** Dieses Teilchen sei jetzt ein freies Neutron, das in einen Atomkern eintritt. Das Neutron spürt einen plötzlichen Potentialabfall von $V = 0$ außen auf ca. -12 MeV innen. Das Neutron komme aus einer Kernspaltung und treffe den Kern mit einer kinetischen Energie von 4 MeV. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es absorbiert wird, was eine weitere Kernspaltung auslöst?

Aufgabe 2 (25 Punkte). Die verallgemeinerte Unschärferelation.

Die verallgemeinerte Unschärferelation lautet

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} \langle C \rangle^2$$

wobei $\hat{C} \equiv -i[\hat{A}, \hat{B}]$.

a) **(6 Punkte)** Überprüfen Sie diese Ungleichung für $\hat{A} = L_z$ und $\hat{B} = \vec{r}$, mit $\vec{r} = (x, y, z)$, durch komponentenweise Auswertung des Kommutators. Es könnte am einfachsten sein zunächst den Fall $\hat{B} = x$ zu berechnen und dann auf $\vec{r}$ zu verallgemeinern.

b) **(7 Punkte)** Überprüfen Sie die Ungleichung für $\hat{A} = L^2$ und $\hat{B} = L_z$. Welche Bedeutung hat das Resultat?

c) **(12 Punkte)** Verwenden Sie abschließend die vorigen Resultate für $\hat{A} = L^2$ und $\hat{B} = [L^2, \vec{r}]$. Es könnte am einfachsten sein zunächst den Fall $\hat{B} = [L^2, z]$ zu berechnen und dann von z auf $\vec{r}$ unter Verwendung von $\vec{r} \cdot \vec{L} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = 0$ zu verallgemeinern.

Aufgabe 3 (25 Punkte). Ein Teilchen mit Spin 3/2.

Betrachten Sie ein Teilchen mit Spin 3/2.

a) **(3 Punkte)** Finden Sie die Basis $|s, s_z\rangle$ aus Eigenzuständen von S_z für solch ein Teilchen.

b) **(8 Punkte)** Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen von S_x und S_y in der zuvor ermittelten Basis.
Hinweis: Verwenden Sie $S_\pm = S_x \pm iS_y$ und
$S_\pm|s, s_z\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - s_z(s_z \pm 1)}|s, s_z \pm 1\rangle$.

c) **(8 Punkte)** Finden Sie die Eigenwerte von S_x mithilfe der Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

d) **(6 Punkte)** Geben Sie mindestens einen Eigenvektor von S_x an.

Aufgabe 4 (30 Punkte). Elektron in statischem elektrischem oder magnetischem Feld.

Diese Aufgabe betrachtet die Veränderung (in erster Ordnung Störungstheorie) des Energiespektrums eines Wasserstoffatoms, das in einem statischen elektrischen Feld oder in einem statischen magnetischen Feld platziert wird.

a) **(10 Punkte) Elektron in einem statischen Magnetfeld (Zeemaneffekt)**

Das Elektron befinde sich im $n = 2$ Zustand von Wasserstoff. Wir vernachlässigen im folgenden alle Spineffekte (d.h. wir betrachten nur Bahndrehimpulseffekte).
Infolge seiner Bahnbewegung hat das Elektron ein magnetisches Moment $\vec{\mu}_\mathbf{l}$. Dieses wechselwirkt mit einem externen Magnetfeld $\vec{\mathbf{B}}$ gemäß:

$$\hat{H}'_B = -\vec{\mu}_\mathbf{l} \cdot \vec{\mathbf{B}}$$

Das magnetische Moment (ein Vektor) $\vec{\mu}_\mathbf{l}$ lässt sich durch den Bahndrehimpulsvektor $\vec{\mathbf{L}}$ des Elektrons als $\vec{\mu}_\mathbf{l} = -\frac{e}{2m}\vec{\mathbf{L}}$ darstellen, mit $e > 0$, und m der Elektronmasse.
Betrachten Sie den Fall eines konstanten Magnetfelds entlang der z-Achse:

$$\vec{\mathbf{B}} = B_0\, \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{z},$$

mit $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{z}$ dem Einheitsvektor entlang der z-Achse, und mit der Konstante B_0.
Verwenden Sie für die ungestörten Eigenzustände $|n\, l\, m_l\rangle$ die Notation:

$$\begin{aligned} |1\rangle &\equiv |2\,0\,0\rangle, \\ |2\rangle &\equiv |2\,1\,0\rangle, \\ |3\rangle &\equiv |2\,1\,+1\rangle, \\ |4\rangle &\equiv |2\,1\,-1\rangle. \end{aligned} \tag{1}$$

1) (4 Punkte) Bestimmen Sie die 4×4 Matrix von $\hat{H}'_B$ in obiger Basis.
Verwenden Sie die Abkürzung $\omega_0 \equiv eB_0/(2m)$ (*Larmorfrequenz*) in Ihrem Resultat.

2) (4 Punkte) Berechnen Sie die Energiekorrekturen aller vier Zustände mit $n = 2$ durch $\hat{H}'_B$ in erster Ordnung.

3) (2 Punkte) Skizzieren Sie qualitativ die totale Energie der $n = 2$ Zustände als Funktion der externen Magnetfeldstärke B_0. Beschreiben Sie die Entartung der Zustände.

b) **(20 Punkte) Elektron in einem statischen elektrischen Feld (Starkeffekt)**

Das Elektron mit $n = 2$ befinde sich jetzt in einem statischen elektrischen Feld. Durch sein elektrisches Dipolmoment $\vec{\mathbf{d}} = -e\vec{\mathbf{r}}$ wechselwirkt das Elektron mit dem externen elektrischen Feld $\vec{\mathbf{E}}$ gemäß:

$$\hat{H}'_E = -\vec{\mathbf{d}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$$

Das elektrische Feld sei konstant und zeige entlang der x-Achse :

$$\vec{\mathbf{E}} = E_0\, \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{x},$$

wobei $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{x}$ der Einheitsvektor entlang der x-Achse ist, und E_0 eine Konstante.

1) (8 Punkte) Bestimmen Sie die 4×4 Matrix von $\hat{H}'_E$ in der ungestörten Basis von Gleichung (1). Die Wellenfunktionen des Elektrons im Wasserstoffatom sind gegeben durch:

$$\psi_{nlm_l}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r)\; Y_{l,m_l}(\theta, \phi).$$

Die hier relevanten Kugelflächenfunktionen sind:

$$\begin{aligned} Y_{0,0}(\theta,\phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\ Y_{1,0}(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \\ Y_{1,\pm1}(\theta,\phi) &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}, \end{aligned}$$

Weiterhin ist folgendes radiale Integral gegeben:

$$\int_0^\infty dr\, r^3 R_{2,0}(r) R_{2,1}(r) = 3\sqrt{3}\, a,$$

wobei a der Bohrradius ist.
Hinweis : In dieser Aufgabe treten viele Integrale auf, aber ein großer Anteil davon ergibt Null. Werten Sie zunächst die verschiedenen Winkelintegrale aus und verwenden Sie Symmetrien um in geeigneten Fällen das Verschwinden des Integrals zu begründen. Wenn das Integral über ϕ verschwindet ist es nicht nötig die Integrale über r und θ zu berechnen.

2) (3 Punkte) Schreiben Sie das Resultat für die 4×4 Matrix von $\hat{H}'_E$ unter Verwendung von

$$\Omega_e \equiv eE_0\frac{a}{\hbar}$$

auf. Welche Einheit hat Ω_e? (mit Begründung)

3) (6 Punkte) Diagonalisieren Sie obige Matrix und berechnen Sie die Energiekorrekturen erster Ordnung der $n = 2$ Zustände durch $\hat{H}'_E$ (es genügt die Eigenwerte auszurechnen, die Eigenzustände werden hier nicht benötigt).

4) (3 Punkte) Skizzieren Sie qualitativ die totale Energie der $n = 2$ Zustände als Funktion der externen elektrischen Feldstärke E_0. Beschreiben Sie die Entartung der Zustände.