

Aufgabenblatt 9  
Theoretische Physik 3 : QM SS2017  
Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

16.06.2017

**Aufgabe 1 – Algebraische Methode des Wasserstoffatoms. (85 Punkte)**

Betrachte die radiale, dimensionslose Gleichung für das Coulomb-Problem in folgender Form

$$\left( \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} \right) u_{n,l}(\rho) = \epsilon u_{n,l}(\rho),$$

wobei  $\rho = r/a$  ( $a$  ist der Bohr-Radius), und  $u_{n,l}(\rho) = \rho R_{n,l}(\rho)$  die reduzierte Wellenfunktion ist, welche die Bedingungen  $\int_0^\infty |u_{n,l}(\rho)|^2 d\rho = 1$  und  $u_{n,l}(0) = 0$  erfüllt. Wir führen folgende Operatoren ein:

$$A_l^- = \frac{d}{d\rho} + \frac{l+1}{\rho} - \frac{1}{l+1} \quad A_l^+ = \frac{d}{d\rho} - \frac{l+1}{\rho} + \frac{1}{l+1}.$$

a) (10 p.) Berechne  $A_l^- A_l^+$ . Zeige, dass sich die dimensionslose Radialgleichung schreiben lässt als

$$(A_l^- A_l^+) u_l = \left( \epsilon - \frac{1}{(l+1)^2} \right) u_l.$$

b) (15 p.) Zeige, dass

$$A_l^+ A_l^- = A_{l+1}^- A_{l+1}^+ - \frac{1}{(l+2)^2} + \frac{1}{(l+1)^2}.$$

Multipliziere die Gleichung aus a) mit  $A_l^+$  und zeige damit, dass  $A_l^+ u_l(\rho)$  die Radialgleichung mit dem gleichen Eigenwert  $\epsilon$  aber mit einem Drehimpuls  $l' = l + 1$  löst.

c) (15 p.) Zeige ebenso, dass  $A_{l-1}^- u_l(\rho)$  die Radialgleichung mit dem gleichen Eigenwert  $\epsilon$  aber einem Drehimpuls  $l' = l - 1$  löst.

d) (15 p.) Berechne den Erwartungswert von  $A_l^- A_l^+$  mit  $u_l(\rho)$  und zeige, dass  $\epsilon \leq \frac{1}{(l+1)^2}$ .

e) (15 p.) Zeige, dass für ein gegebenes  $\epsilon$  ein maximaler Wert  $l_{\max}$  des Drehimpulses existiert, so dass  $\epsilon = 1/n^2$ , wobei  $n = l_{\max} + 1$  gesetzt wurde. Zeige, dass die zugehörige radiale Wellenfunktion  $u_{l_{\max}}$  die Differentialgleichung

$$\left( \frac{d}{d\rho} - \frac{n}{\rho} + \frac{1}{n} \right) u_{l_{\max}}(\rho) = 0$$

erfüllt.

f) (15 p.) Leite aus diesen Ergebnissen die Energielevel und zugehörigen Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms ab.

**Aufgabe 2 – Wasserstoffähnliches Atom. (15 Punkte)**

Ein wasserstoffähnliches Atom besteht aus einem Elektron und einem Kern mit  $Z$  Protonen. Bestimme die Bohrschen Energieniveaus  $E_n(Z)$ , die Bindungsenergie  $E_1(Z)$ , den Bohrschen Radius  $a(Z)$ , und die Rydberg-Konstante  $R(Z)$  für das wasserstoffähnliche Atom. Drücke die Ergebnisse als Vielfache der Werte für das Wasserstoffatom aus. Sind diese Ausdrücke immernoch korrekt für hohe  $Z$ ? Warum?