Aufgabenblatt 8
Theoretische Physik 3 : QM SS2017
Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

09.06.2017

Aufgabe 1. (20 Punkte)

Zeige, dass der Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ in Kugelkoordinaten die folgende Form annimmt:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

Aufgabe 2. (40 Punkte)

Um die Radialgleichung eines unendlichen sphärischen Potentialtopfes zu lösen, führen wir die sphärischen Bessel-Funktionen $j_l(x)$ der Ordnung l ein:

$$j_l(x) \equiv (-x)^l \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l \frac{\sin x}{x}\,.$$

Eine sphärische Bessel-Funktion ist ein Spezialfall einer Bessel-Funktion $J_\alpha(x)$:

$$J_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}\,,$$

für halbzahlige α. Es gilt: $J_{n+1/2} = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\, j_n(x)$.

a) *(20 p.)* Benutze die Definition der Bessel-Funktionen, um $J_{1/2}$ und $J_{3/2}$ zu berechnen. Verifiziere an diesen Beispielen, dass die Relation zwischen $J_{l+1/2}$ und j_l korrekt ist.

Die sphärischen Bessel-Funktionen besitzen für $x \to 0$ und $x \to \infty$ wohldefinierte Grenzwerte:

$$j_l(x) \to \frac{2^l l!}{(2l+1)!} x^l \qquad \text{für } x << 1$$
$$j_l(x) \to \frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{(l+1)\pi}{2}\right) \qquad \text{für } x >> 1$$

b) *(10 p.)* Berechne beide Grenzwerte für j_0, j_1 und j_2.

c) *(10 p.)* Berechne j_3 mithilfe der am Anfang gegebenen Definition.

Mathematische Tipps:

$$\sin(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$
$$\Gamma(m+1/2) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot (2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi}$$
$$\int_0^\pi \sin^n(x)\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(1/2+n/2)}{\Gamma(1+n/2)}\sqrt{\pi}$$

Aufgabe 3. (20 + 20 Punkte)

Betrachte ein Teilchen in einem dreidimensionalen quadratischen Kasten mit Seitenlänge a und periodischen Randbedingungen:

$$\begin{cases} \Psi(r_i = a,\, t) = \Psi(r_i = 0,\, t), \\ \frac{\partial}{\partial r_i}\Psi(r_i = a,\, t) = \frac{\partial}{\partial r_i}\Psi(r_i = 0,\, t). \end{cases}$$

a) *(20 p.)* Löse die Schrödinger-Gleichung in kartesischen Koordinaten.
Hinweis: Separiere die Variablen um das Problem auf eine Dimension zu reduzieren und löse es.

b) *(10 p.) (Bonus)* Bestimme das Energiespektrum.
Was sind die Entartungsgrade der vier niedrigsten Energiezustände?

c) *(10 p.) (Bonus)* Betrachte eine (fiktive) Verallgemeinerung des Problems auf *vier* räumliche Dimensionen.
Wie wäre das Spektrum mit dem Spektrum des isotropen harmonischen Oszillators zu vergleichen?
Hinweis: Es gibt den Vier-Quadrate-Satz von Lagrange, der lautet, dass jede natürliche Zahl als Summe von vier Quadratzahlen geschrieben werden kann:

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ \exists\, i, j, k, l \in \mathbb{Z} :\ n = i^2 + j^2 + k^2 + l^2.$$

Aufgabe 4. (20 Punkte)

Zeige mit Hilfe der dreidimensionalen Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\Psi(\vec{r}, t),$$

dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = \Psi^*\Psi$ die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0,$$

erfüllt, wobei die Stromdichte $\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left[\Psi^*(\vec{\nabla}\Psi) - (\vec{\nabla}\Psi^*)\Psi\right]$ als der "Wahrscheinlichkeitsfluss" durch eine Einheitsfläche interpretiert werden kann.