Aufgabenblatt 7
Theoretische Physik 3 : QM SS2017
Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

02.06.2017

Aufgabe 1. (45 Punkte)

Erinnere dich an den eindimensionalen quantenmechanischen Harmonischen Oszillator mit dem Spektrum gegeben durch

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

und den stationären Zuständen $|n\rangle$:

$$\hat{H}\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle\,.$$

Erinnere dich an die Leiteroperatoren

$$a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega m}}(m\omega x \mp i\hat{p}),$$

welche auf $|n\rangle$ wie folgt wirken:

$$a_+\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\ , \qquad a_-\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\ .$$

Wir wissen, dass $|n\rangle$ eine vollständige ONB in unserem Hilbert-Raum bilden. In einer solchen *diskreten* Basis wird ein Vektor als unendliche diskrete Spalte von Werten dargestellt, während ein Operator durch unendlich dimensionale Matrizen beschrieben wird. Betrachte Matrixdarstellungen von $\hat{H}$-, $\hat{x}$- and $\hat{p}$-Operatoren in dieser Basis.

a) *(5 p.)* Schreibe die Matrixdarstellung des Hamiltonian $H_{nm} = \langle n|\,\hat{H}\,|m\rangle$ auf.

b) *(15 p.)* Zeige ohne einen expliziten Ausdruck für $\langle x|n\rangle$ auszunutzen, dass

$$\langle n|\,\hat{x}\,|m\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{nm}$$

Hinweis: Drücke $\hat{x}$ durch Ausdrücke bestehend aus Leiteroperatoren aus.

c) *(15 p.)* Zeige ohne einen expliziten Ausdruck für $\langle x|n\rangle$ auszunutzen, dass

$$\langle n|\,\hat{p}\,|m\rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ -\sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{nm}$$

Hinweis: Drücke $\hat{p}$ durch Ausdrücke bestehend aus Leiteroperatoren aus.

d) *(10 p.)* Bestimme mit gegebenem $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}$ die räumliche Darstellung des Hamiltonian

$$\langle x | \hat{H} | x' \rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \delta(x - x').$$

Beachte, dass wir die "übliche" Operatorform des Hamiltonian erhalten, wenn wir diesen in obiger Form auf Zustände in räumlicher Darstellung wirken lassen:

$$\int \mathrm{d}x' \; \langle x | \hat{H} | x' \rangle \langle x' | \psi \rangle = \int \mathrm{d}x' \; \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \delta(x - x') \langle x' | \psi \rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \langle x | \psi \rangle \,,$$

wobei $\langle x | \psi \rangle \equiv \psi(x)$.

Beachte, dass alle Vektoren und Operatoren Größen sind, welche invariant unter Basiswechsel sind. Darstellungen in gewählten Basen (Räumen) sind einfach verschiedene Wege um dieselbe Größe zu beschreiben.

Aufgabe 2 – 2D Quanten Harmonischer Oszillator. (55 + 20 Punkte)

a) *(10 p.)* Unter der Voraussetzung, dass die Lösungen für den eindimensionalen Fall bekannt sind, löse den zweidimensionalen isotropen quantenmechanischen HO in kartesischen Koordinaten:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x, y) + \frac{m\omega^2}{2} \left(x^2 + y^2 \right) \psi(x, y) = E\psi(x, y).$$

Hinweis: Nutze die Methode der Separation von Variablen: $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$. Stelle separate Gleichungen für $X(x)$ und $Y(y)$ auf.

b) *(5 p.)* Schreibe das Energiespektrum auf. Was ist der Entartungsgrad der Energielevel?

c) *(10 p.)* Zeige, dass der zweidimensionale Laplace-Operator in Polarkoordinaten folgende Form annimmt:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

d) *(10 p.)* Bestimme den Drehimpulsoperator $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ in Polarkoordinaten und zeige, dass $[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$.

e) *(10 p.)* Betrachte den 2D isotropen HO in Polarkoordinaten. Separiere die Variablen $\psi(r, \phi) = v(r)u(\phi)$ und stelle Gleichungen für $v(r)$ und $u(\phi)$ auf.

Die Gleichung für $v(r)$ kann in die Gleichung für die verallgemeinerten Laguerre-Polynome $L_{n_r}^{|M|+1} \left(\frac{m\omega}{\hbar} r^2 \right)$ transformiert werden. Damit erhält man die finale Lösung

$$\psi_{n_r M}(r, \phi) = C_{n_r M} \; r^{|M|} e^{\frac{-m\omega}{2\hbar} r^2} L_{n_r}^{|M|+1} \left(\frac{m\omega}{\hbar} r^2 \right) e^{iM\phi}$$

mit den Energieeigenwerten

$$E = \hbar\omega(|M| + 1 + 2n_r), \quad n_r = 0, 1, 2, \ldots, \quad M = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \;,$$

wobei M die Quantenzahl korrespondierend zu $\hat{L}_z$ ist.

f) *(10 p.)* Finde Eigenwerte und -vektoren von $\hat{L}_z$ in Polarkoordinaten. Zeige, dass die vollständige und orthonormale Menge von Eigenfunktionen tatsächlich für $\hat{H}$ und $\hat{L}_z$ gemeinsam ist.

g) *(20 p. Bonus)* Finde die Lösung der Schrödinger Gleichung für den Grundzustand ($n_r = 0, M = 0$) in Polarkoordinaten.

Hinweis: Setze $E = \hbar\omega$, $u''(\phi) = 0$ und substituiere $v(r) = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} r^2} F(r)$.