Übungsblatt 6
Theoretische Physik 3 : QM SS2017
Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

26.05.2017

Aufgabe 1. (35 + 20 Punkte)

Betrachen Sie die Schrödinger-Gleichung mit dem folgenden Potential:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x < a \\ V_1 & x > a. \end{cases}$$

a) *(10 p.)* Betrachte die gebundenen Zustände des Systems ($E < 0$). Leiten Sie die Gleichungen für die Quantenzahlen her. Beachten Sie, dass Sie für den Fall $V_1 = 0$ die Ausdrücke aus der Vorlesung erhalten sollten.

b) *(10 p.)* Geben Sie die Eigenfunktionen für den Hamiltonian für den Fall $0 < E < V_1$ und zeichnen Sie die Eigenfunktionen für einige Werte von E in diesem Bereich.

c) *(10 p.)* Betrachten Sie die Streuzustände für den Fall $E > V_1$ und leiten Sie die Ausdrücke für die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten an.

d) *(5 p.)* Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen des Hamiltonians für $x > a$ den Grenzfall $V_1 \to +\infty$ verschwinden. Stimmt es, dass nicht nur die Eigenfunktionen des Hamiltonians, sondern *alle* Wellenfunktionen für $x > a$ verschwinden müssen?

e) *(10 p.) Bonus* Betrachen Sie den Grenzfall $V_1 \to +\infty$. Zeigen Sie, dass das System ausschließlich für $V_0 \leq \pi^2\hbar^2/(8ma^2)$ keine gebundenen Zuständen besitzt.

f) *(10 p.) (Bonus)* Nehmen Sie an, dass das System für $V_1 \to +\infty$ keine gebundenen Zustände besitzt. ($\sqrt{2mV_0a^2/\hbar^2} < \pi/2$), wobei bekannt ist, dass das System für $V_1 = 0$ immer einen gebundenen Zustand besitzt. Bestimme $\bar{V}_1$, so dass für $V_1 < \bar{V}_1$ das System mindestens einen gebundenen Zustand besitzt.

Aufgabe 2. – Hermitesche Operatoren (30 Punkte)

Wenn die zwei hermitesche Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kommutieren $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, beweisen Sie dass

a) *(5 p.)* wenn $|\psi\rangle$ ein Eigenvektor von $\hat{A}$ ist, so ist $\hat{B}\,|\psi\rangle$ ebenfalls ein Eigenvektor von $\hat{A}$ mit gleichem Eigenwert;

b) *(5 p.)* wenn $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ zwei Eigenvektoren von $\hat{A}$ mit verschiedenen Eigenwerten sind, so verschwindet das Matrixelement $\langle\psi_1|\,\hat{B}\,|\psi_2\rangle = 0$;

c) *(15 p.)* kann man eine orthonormierte Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren von $\hat{A}$ und $\hat{B}$ konstruieren (betrachte den Fall der diskreten Spektrums).

d) *(5 p.)* Zeigen Sie die Umkehrung von des Vorherigen.

Aufgabe 3. – Operatoren und Dirac-Notation (35 Punkte)

a) *(5 p.)* Nennen Sie die Leiteroperatoren für den quantenmechanischen harmonischen Oszillator. Beweisen Sie, dass

$$\hat{a}_+ = (\hat{a}_-)^\dagger.$$

b) *(5 p.)* Zeigen Sie, dass für jede Observable $\hat{q}$ mit einem *nicht entarteten* Spektrum,

$$\hat{q} = \sum_q q \left|q\right\rangle \left\langle q\right| ,$$

wobei $\hat{q}\left|q\right\rangle = q\left|q\right\rangle$, und für den Fall eines kontinuierlichen Spektrums $\sum_q \to \int \mathrm{d}q$.
Hinweis: da der Satz von Eigenfunktionen vollständig und orthonormal ist, kann verwendet werten, dass

$$\sum_q \left|q\right\rangle \left\langle q\right| = \hat{1}.$$

c) *(5 p.)* Wir wissen schon aus der Vorlesung, dass

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\frac{i}{\hbar}px}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\langle p|\hat{x}|\psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\left\langle p|\psi\right\rangle .$$

d) *(5 p.)* Zeigen, dass

$$\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\, \phi^*(p) \left[i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right] \phi(p),$$

wobei

$$\phi(p) \equiv \langle p|\psi\rangle$$

e) *(5 p.)* Zeigen, dass

$$\left\langle x\middle|\hat{p}\middle|x'\right\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x').$$

f) *(10 p.)* Nennen Sie die Wellenfunktion für den stationären Zustand eines unendlichen Potentialwalls (Kastenpotential).

$$\langle x|n\rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) & 0 < x < a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $\langle p|n\rangle$.