Übungsblatt 5
Theoretische Physik 3 : QM SS2017
Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

19.05.2017

Aufgabe 1 – Freies Teilchen. (40 Punkte)

Betrachte ein freies Teilchen welches sich in einer Dimension bewegt. Seine Wellenfunktion bei $t = 0$ ist gegeben durch zwei Gauß-Funktionen

$$\Psi(x,0) = A\left(e^{ik_0x}\,e^{-\frac{\alpha}{2}\,(x+x_0)^2} + e^{-ik_0x}\,e^{-\frac{\alpha}{2}\,(x-x_0)^2}\right)$$

wobei α und k_0 reelle Parameter sind.

a) *(10 p.)* Bestimme A so dass die Wellenfunktion auf 1 normiert ist.

b) *(10 p.)* Berechne die Fourier-Transformation $\phi(k)$ von $\Psi(x,0)$.

c) *(15 p.)* Zeige, dass die Wellenfunktion für jede Zeit t gegeben ist durch

$$\Psi(x,t) = \frac{A}{\sqrt{z}}\left(e^{ik_0x}\,e^{-\frac{\alpha}{2z}\,(x+x_0-v_0t)^2} + e^{-ik_0x}\,e^{-\frac{\alpha}{2z}\,(x-x_0+v_0t)^2}\right),$$

wobei die Größen $z \equiv 1 + i\frac{\alpha\hbar t}{m}$ und $v_0 = \frac{\hbar k_0}{m}$ eingeführt wurden.

d) *(5 p.)* Schreibe die Ortswahrscheinlichkeitsdichte auf und interpretiere diese.

Aufgabe 2 – Matrizen: Eigenwerte und Eigenvektoren. (20 Punkte)

a) *(5 p.)* Finde die Eigenwerte und -vektoren der zweidimensionalen Rotations- und hyperbolischer Rotationsmatrizen, entsprechend:

$$\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix};\qquad \begin{bmatrix}\cosh\phi & \sinh\phi\\ \sinh\phi & \cosh\phi\end{bmatrix}.$$

b) *(5 p.)* Finde die Eigenwerte und -vektoren der folgenden 3×3-Matrizen:

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix};\qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}.$$

c) *(10 p.)* Diagonalisiere die folgenden Matrizen:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 2 & -4 & 2\end{bmatrix};\qquad \begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{bmatrix}.$$

Aufgabe 3 – Doppeltes δ-Potential. (40 Punkte)

Betrachte ein eindimensionales Modell für ein Molekül in welchem die Energielevel zweifach entartet sind und dem Potential:

$$V(x) = -V_0 a \left(\delta(x-a) + \delta(x+a)\right),$$

folgen, wobei V_0 und a reelle Parameter sind.

a) *(15 p.)* Finde den Reflektions- und Transmissionskoeffizient für einen Teilchenstrahl der auf das Potential einfällt.

b) *(10 p.)* Finde den gebundenen Zustand des Systems, indem du die Impulsraumdarstellung benutzt. Wie viele gebundene Zustände besitzt das System?

c) *(10 p.)* Bestimme für $V_0 a = \frac{\hbar^2}{ma}$ die erlaubten Energien für die gebundenen Zustände und skizziere die zugehörigen Wellenfunktionen.

d) *(5 p.)* Diskutiere die Rolle des Parameters a in Bezug auf die Wellenfunktionen. Bestimme hierzu die geraden und ungeraden Wellenfunktionen des Systems und betrachte die a Abhängigkeit der Lösungen.

(Bonus) Aufgabe 4 – Endlicher Potentialtopf. (20 points)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einem endlichen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2a} & \text{für } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{für } x > |a| \end{cases}.$$

Die Energielevel sind bestimmt durch die Bedingung

$$z \tan z = \sqrt{z_0^2 - z^2}$$

wobei

$$z = \frac{a}{\hbar}\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{2a}\right)}, \qquad z_0 = \frac{a}{\hbar}\sqrt{\frac{m\alpha}{a}}.$$

a) *(10 p.)* Betrachte den Limes $a \to 0$ und setze voraus, dass E in diesem Limes endlich ist. Zeige, dass du den eindeutigen gebundenen Zustand des δ-Potentialtopfes $E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$ erhälst.

b) *(5 p.)* Welchen Wert sollte $m\alpha a/\hbar^2$ annehmen, damit das System genau n gebundene Zustände besitzt?