Übungsblatt 4
Theoretische Physik 3 : QM SS2017
Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

12.05.2017

Übung 1 – 1D Fourier-Transformation. (30 Punkte)

Wir definieren die (räumliche) Fourier-Transformation (FT) einer Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ und die korrespondierende inverse Transformation als

$$\Phi(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,t) e^{-ikx} \mathrm{d}x,$$
$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k,t) e^{ikx} \mathrm{d}k.$$

a) *(10 p.)* Nutze die FT um die Schrödinger-Gleichung des Harmonischen Oszillators *im k-Raum* darzustellen.
Hinweis: Benutze $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{ax} \mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} \mathrm{d}x$

b) *(10 p.)* Gebe die SG mit einem beliebigen Potential *im k-Raum* an.
Gehe davon aus, dass das Potential als Potenzreihe $V(x) = \sum_n a_n x^n$ darstellbar ist.

c) *(10 p.)* Löse die eindimensionale SG eines *freien Teilchens im k-Raum.*
Führe anschließend die inverse FT aus, um die allgemeine Lösung im x-Raum zu finden.

Übung 2 – Inneres Produkt. (20 points)

a) *(10 p.)* Beweise die Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz Ungleichung:

$$\forall\ |\alpha\rangle, |\beta\rangle : \quad |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \leq \langle\alpha|\alpha\rangle \langle\beta|\beta\rangle.$$

Hinweis: Betrachte die Norm des Vektors $|\psi\rangle = |\alpha\rangle - \lambda|\beta\rangle$ mit $\lambda = \langle\beta|\alpha\rangle / \langle\beta|\beta\rangle$.

b) *(10 p.)* Zeige, dass exakte Gleichheit $|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \langle\alpha|\alpha\rangle \langle\beta|\beta\rangle$ gilt, *genau dann wenn* $|\alpha\rangle$ and $|\beta\rangle$ proportional sind.

Übung 3 – Matrizen. (60 points)

Die Matrixmultiplikation ist eine nicht-kommutative Operation. Wir definieren den Kommutator zweier Matrizen A und B durch $[A,B] = AB - BA$.

a) *(10 p.)* Betrachte die drei Pauli-Matrizen:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Berechne σ_x^2, σ_y^2, σ_z^2, und die Kommutatoren $[\sigma_x, \sigma_y]$, $[\sigma_y, \sigma_z]$, $[\sigma_z, \sigma_x]$.

b) *(10 p.)* Beweise die folgenden Identitäten für beliebige Matrizen A, B und C:

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C],$$
$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

c) *(10 p.)* Wir definieren eine Funktion $f(A)$ mit einer Matrix A als Variable durch die Maclaurin Reihendarstellung (falls diese existiert):

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n.$$

Betrachte den Fall $[A, B] = 0$. Zeige

$$e^A \, e^B = e^{A+B}.$$

d) *(15 p.)* Betrachte einen *anderen* Spezialfall für den $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ gilt.
Beweise durch Induktion

$$[A, B^n] = [A, B] n B^{n-1}.$$

Zeige damit, dass

$$[A, F(B)] = [A, B] F'(B),$$

wobei die Funktion F' durch Differentiation von F entsteht.

e) *(15 p.)* Betrachte wiederum $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ und beweise die Glauber-Formel

$$e^A \, e^B = e^{A+B} \, e^{\frac{1}{2}[A,B]}.$$

Hinweis: Betrachte die Funktion $F(t) = e^{tA} \, e^{tB}$. Zeige, dass diese die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = (A + B + t[A, B])F(t)$ erfüllt. Löse die Gleichung durch die Feststellung, dass $(A + B)$ und $[A, B]$ kommutieren und folglich als gewöhnliche Zahlen aufgefasst werden können.

(Bonus) Aufgabe 4. (20 Punkte)

Die relativistische Form der Energie eines freien Teilchens mit Impuls $p = \hbar k$ ist durch

$$E(p) = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4},$$

gegeben, wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und m die Masse des freien Teilchens ist. Die Winkelgeschwindigkeit ist folgendermaßen definiert

$$\omega(k) = \frac{E(\hbar k) - E(0)}{\hbar}$$

Berechne den relativistischen Ausdruck für die Gruppengeschwindigkeit und die Phasengeschwindigkeit. Überprüfe, dass diese Geschwindigkeiten nicht größer als c werden können. Der nichtrelativistische Ausdruck für die Gruppen- und Phasengeschwindigkeit ergibt sich aus dem Limes $c \to \infty$. Überprüfe, dass man den nichtrelativistischen Ausruck bei $c \to \infty$ zurück erhält.