Übungsblatt 2
Theoretische Physik 3 : QM SS2017
Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

28.04.2017

Aufgabe 1. (60 Punkte)

Betrachte ein Teilchen innerhalb eines unendlichen Potentialtopfs der Breite l

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2} \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimme von der stationären Schrödinger-Gleichung (SG) ausgehend das Energiespektrum des Systems.
Welche Bedingungen legen zusätzlich zu der SG das Spektrum fest?
Wie verändert sich die Grundzustandsenergie, wenn die Breite des Topfes verdoppelt wird?

b) Die allgemeine Lösung der zeitabhängigen SG kann durch eine Superposition von stationären Zuständen $\Psi_n(x,t)$ ausgedrückt werden:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Psi_n(x,t)$$

Gib die normierten (räumlich) geraden und ungeraden stationären Zustände $\Psi_n(x,t)$ an.
Welche zusätzlichen Bedingungen sind nötig um eine spezielle Lösung festzulegen?
Welche Freiheit in der Bestimmung der Wellenfunktion verbleibt nach Anwendung aller physikalischen Bedingungen?

c) Betrachte die Zeitentwicklung der folgenden Wellenfunktion:

$$\Psi(x, t=0) = \begin{cases} f(x) & \text{for} \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im allgemeinsten Fall, unabhängig von der genauen Form von $f(x)$, wann verschwindet die Wahrscheinlichkeit das Teilchen in der rechten Hälfte des Topfes ($0 \leq x \leq \frac{l}{2}$) zu finden?
Schreibe den expliziten Ausdruck der Wellenfunktion zu diesen Zeitpunkten auf.
Welche Oszillationsperiode besitzt das Teilchen im Allgemeinen?

d) Betrachte nun im Folgenden (bezogen auf Aufgaben d), e) und f))

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{96}{l^3}}\ x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{4} \\ \sqrt{\frac{96}{l^3}}\ \left(\frac{l}{2} - x\right), & \frac{l}{4} \leq x \leq \frac{l}{2}. \end{cases}$$

Berechne die Erwartungswerte der Koordinate x und Impuls p des Teilchens zur Zeit $t = 0$.
Wie können die Resultate ohne Rechnung bestimmt werden?

e) Bestimme das Produkt der Standardabweichungen $\sigma_x \sigma_p$ bei $t = 0$ und vergleiche das Ergebnis mit dem des Grundzustandes.

f) Nehme an wir messen die Energie des Teilchens in einem bestimmten Zustand.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich im Grundzustand befindet? (Beachte die Orthonormalität der Ψ_n.)
Wie entwickelt sich die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen in einem Zustand n-ter Energie zu finden zeitlich? Was lässt sich hieraus für die Zeitentwicklung des Energieerwartungswertes ableiten?

Aufgabe 2. (40 Punkte)

Ein Teilchen innerhalb des unendlichen Potentialtopfes besitzt als Anfangswellenfunktion eine gleichmäßige Mischung des ersten und zweiten angeregten stationären Zustandes:

$$\Psi(x, 0) = A\,(\,\Psi_2(x) \;+\; \Psi_3(x))\ .$$

Beachte, dass Ψ_2 die räumlich ungerade Wellenfunktion des ersten angeregten Zustands des Systems ($n = 2$) ist. Ψ_3 ist dagegen die räumlich gerade Wellenfunktion des zweiten angeregten Zustands ($n = 3$).

a) Normiere $\Psi(x, 0)$.

b) Bestimme $\Psi(x, t)$ und $|\Psi(x, t)|^2$. Definiere $\omega \equiv \pi^2\hbar/2ml^2$ um das Ergebnis zu vereinfachen. Überprüfe die Zeitunabhängigkeit der Normierung.

   Berechne die Zeitentwicklung von $\langle x \rangle$.
   Was sind Frequenz und Amplitude seiner Oszillation?
   Bestimme $\langle p \rangle$ aus $\langle p \rangle = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\langle x \rangle$.

c) Bestimme den Erwartungswert von H. Wie verhält sich dieser im Vergleich zu E_2 und E_3?