Aufgabenblatt 10
Theoretische Physik 3 : QM SS2017
Dozent : Prof. M. Vanderhaeghen

23.06.2017

Aufgabe 1. (40 Punkte)

Zeigen Sie, dass die gemeinsamen Eigenzustände der Operatoren L^2 und L_z die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$ sind. Hierbei bezeichnet $\vec{L} = \vec{r} \times \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right)$ den Bahndrehimpulsoperator.

Tipps: Nutzen Sie Kugelkoordinaten, um L_x, L_y und L_z als Funktionen der Winkel θ und ϕ zu schreiben. Berechnen Sie explizit das Produkt L_+L_-, wobei $L_\pm = L_x \pm iL_y$. Drücken Sie die Eigenzustandsgleichungen für L^2 und L_z als Differentialformen aus und zeigen Sie, dass dies genau die Gleichungen sind, die die Kugelflächenfunktionen definieren.

Aufgabe 2. (30 Punkte)

Zeige, dass $L_\pm Y_l^m = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}\, Y_l^{m\pm1}$.
Hinweis: Betrachte die Norm von $L_\pm Y_l^m$.

Aufgabe 3. (30 Punkte)

Zeige, dass für ein Teilchen in einem Potential $V(\vec{r})$ die Änderungsrate des Drehimpulserwartungswertes $\vec{L}$ gleich dem Drehmomentserwartungswert ist. (Beachte, dass dies die Formulierung des Ehrenfestschen Theorems für rotierende starre Körper ist). In Formeln ausgedrückt also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\vec{L}\rangle = \langle\vec{N}\rangle \qquad \text{wobei} \qquad \vec{N} = \vec{r} \times (-\vec{\nabla}V).$$

Zeige, dass $\langle\vec{L}\rangle$ konstant ist für kugelsymmetrische Potentiale. (Dies ist die quantenmechanische Formulierung der Drehimpulserhaltung.)

Aufgabe 4. (*Bonus* 20 Punkte)

Bestätigen oder ungültig die folgenden Aussagen:

a) *(10 p.)* Wenn $[\hat{H}, \hat{\vec{L}}] = \vec{0}$, die Energieniveaus hängen nicht von m (von den Eigenwerten der Projektion einer der Komponenten des Drehimpulses $\hat{\vec{L}}$) ab.

b) *(10 p.)* Wenn $[\hat{H}, \hat{L}^2] = 0$, die Energieniveaus hängen nicht von l ab.