Symmetrien in der Physik

PD Dr. Georg von Hippel

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Wintersemester 2017/2018

Organisatorisches

JOGUStINe – Anmeldung

Die Anmeldephase endet am **Freitag, 20.10.2017 um 21:00 Uhr**.

Alle Teilnehmer, die Credit-Points für diesen Kurs erhalten wollen, müssen sich bis dahin angemeldet haben.

Organisatorisches

Leistungsnachweis

Als Leistungsnachweis ist eine **mündliche Prüfung** von 30 Minuten vorgesehen.

Voraussetzung für die Prüfungszulassung ist die erfolgreiche Teilnahme an den Übungen.

Organisatorisches

Übungen

Übungen finden in der Regel jede zweite Woche Donnerstags 12:00–14:00 Uhr im Newton-Raum statt.

Übungstermine: 26.10., 16.11., 30.11., 14.12., 11.1., 25.1., 8.2.

Übungsblätter werden in der Übung aus- und abgegeben.
(Das erste Übungsblatt gibt es morgen.)

Website zur Vorlesung

http://wwwth.kph.uni-mainz.de/1906.php

Literatur zur Vorlesung

S. Scherer, *Symmetrien und Gruppen in der Teilchenphysik*, Springer (Berlin/Heidelberg) 2016.

H.F. Jones, *Groups, Representations and Physics*, IoP Publishing (Bristol/Philadelphia) 1998.

A. Zee, *Group Theory in a Nutshell for Physicists*, Princeton University Press 2016.

W. Greiner, *Theoretische Physik (Bd. 5: Quantenmechanik II – Symmetrien)*, Harri Deutsch (Thun/Frankfurt a.M.) 1985.

Was ist Symmetrie?

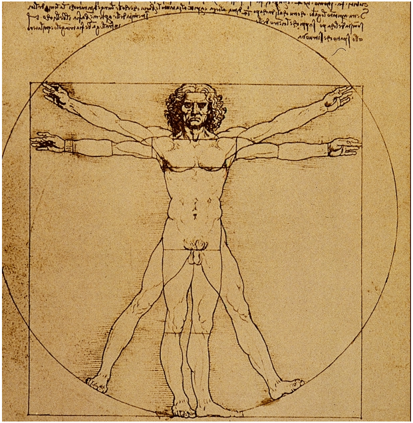
Etymologie von gr. συν- "mit-, zusammen-" und μέτρον "Maß" $\rightsquigarrow$ συμμετρία "Gleichmäßigkeit, Ebenmaß"

Entsprechende lateinische Wurzeln *con-* "mit-, zusammen-" und *mensura* "Maß" produzieren mit *-abilis, -ibilis* "-fähig, -bar" modernes *kommensurabel* "mit gleichem Maßstab messbar, vergleichbar"

Vom Wortsinn ist Symmetrie also in etwa soviel wie Regelmäßigkeit oder Vergleichbarkeit der Proportionen.

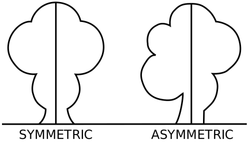
Was ist Symmetrie?

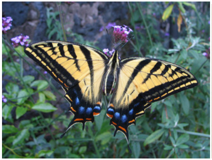
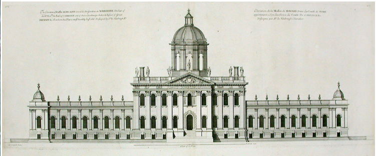
In die deutsche Sprache entlehnt wurde Symmetrie zunächst als Fachbegriff der Kunsttheorie im Sinne der Wohlproportioniertheit (17.–18. Jhdt.)



Was ist Symmetrie?

In der modernen **Umgangssprache** hingegen meint "symmetrisch" meist die Existenz einer Spiegelebene.

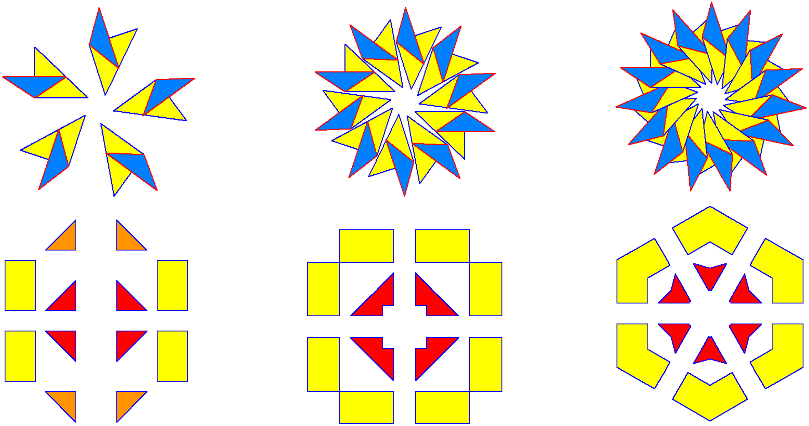




Was ist Symmetrie?

Typische **Schuldefinition**: Eine Figur ist symmetrisch, wenn sie in zwei oder mehr zueinander kongruente Teile zerlegt werden kann, die in systematischer Weise angeordnet sind.



Was ist Symmetrie?

Hermann Weyl
(1885–1955)

Mathematischer Symmetriebegriff

nach Hermann Weyl:
Symmetrie bedeutet Invarianz unter einer Gruppe automorpher Abbildungen.

Richard Feynman
(1918–1988)

Richard Feynman:
"Laut der ausgezeichneten Definition Professor Weyls, eines Mathematikers, ist ein Ding symmetrisch, wenn es eine Möglichkeit gibt, es zu verändern, und es hinterher doch wieder so aussieht wie vorher."

Was ist Symmetrie?

Etwas formaler: Die Teilmenge S eines Raumes R ist symmetrisch unter $f \in \mathrm{Aut}(R)$, wenn $f(S) = S$.

Die Abbildungen, unter denen ein gegebenes S symmetrisch ist, bilden eine (konkrete) Gruppe:

$$\mathrm{id}_X(S) = S \tag{1}$$

$$f(S) = S \Rightarrow f^{-1}(S) = f^{-1}(f(S)) = S \tag{2}$$

$$f_1(S) = S \wedge f_2(S) = S \Rightarrow (f_1 \circ f_2)(S) = f_1(f_2(S)) = S \tag{3}$$

Symmetrie im mathematischen Sinne hängt also eng mit **Gruppentheorie** zusammen.

Was ist Symmetrie?

Entsprechend ist eine Gleichung auf R symmetrisch unter $f \in \mathrm{Aut}(R)$, wenn $f(x)$ ihr genau dann genügt, wenn x dies tut.

In der klassischen Mechanik drückt sich die Invarianz der Bewegungsgleichungen als Invarianz der Wirkung aus:

$$\int L[q(t)]\,\mathrm{d}t = \int L[f[q](t)]\,\mathrm{d}t.$$

In der Quantenmechanik entspricht die Invarianz der Schrödinger-Gleichung unter (zeitunabhängigen) unitären Transformationen $\hat{U} = \mathrm{e}^{i\alpha\hat{Q}}$ des Hilbert-Raums dem Verschwinden des Kommutators mit dem Hamilton-Operator:

$$[\hat{H}, \hat{Q}] = 0.$$

Literatur zum Symmetriebegriff

B. Krimmel (Hrsg.), *Symmetrie in Kunst, Natur und Wissenschaft*, Ausstellungskatalog, Institut Mathildenhöhe (Darmstadt) 1986.

R. Wille (Hrsg.), *Symmetrie in Geistes- und Naturwissenschaft*, Tagungsband, Springer (Berlin/Heidelberg) 1986.

H. Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press 1952.
[dt.: *Symmetrie*, Birkhäuser (Basel) 1955]

R. Feynman, *The Character of Physical Law*, MIT Press 1965.
[dt.: *Vom Wesen physikalischer Gesetze*, Piper (München) 1990.]

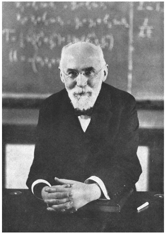
Fundamentale Symmetrien in der Physik

Symmetrie ist Voraussetzung, um überhaupt von Naturgesetzen sprechen zu können: diese müssen zeitunabhängig sein!

$\rightsquigarrow$ Zeittranslationsinvarianz: $t \mapsto t' = t + \Delta t$, $\Delta t \in \mathbb{R}$

Ferner beobachten bzw. postulieren wir die Homogenität und Isotropie des Raumes.

$\rightsquigarrow$ Translationsinvarianz: $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$
Rotationsinvarianz: $\boldsymbol{x} \mapsto D\boldsymbol{x}$, $D \in \mathrm{SO}(3)$



Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928)

Aus dem Relativitätsprinzip folgt die Invarianz der Physik unter einem Wechsel zwischen verschiedenen Inertialsystemen.

$\rightsquigarrow$ Boost-Invarianz:

$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x} \cdot \hat{\boldsymbol{v}})\hat{\boldsymbol{v}} + \gamma(\boldsymbol{v})((\boldsymbol{x} \cdot \hat{\boldsymbol{v}})\hat{\boldsymbol{v}} - t\boldsymbol{v}),$$

$$t \mapsto t' = \gamma(\boldsymbol{v})\left(t - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}\right)$$

Henri Poincaré (1854–1912)

mit $\gamma(\boldsymbol{v}) = 1/\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$

Zusammen bilden Rotationen und Boosts die **Lorentz-Gruppe**, und mit den Raumzeittranslationen die **Poincaré-Gruppe**.

Fundamentale Symmetrien in der Physik

Die Zeitumkehr $T: t \mapsto -t$, die Paritätstransformation $P: \boldsymbol{x} \mapsto -\boldsymbol{x}$ und die Ladungskonjugation $C: e \mapsto -e$ (Vertauschung von Teilchen und Antiteilchen) sind Symmetrien der klassischen Mechanik und des Elektromagnetismus.

In der Teilchenphysik werden diese Symmetrien durch die schwache Wechselwirkung verletzt.

Das **CPT-Theorem** besagt jedoch, dass die Verknüpfung aller drei Operationen eine Symmetrie jeder lokalen Quantenfeldtheorie sein muss.

Dies garantiert unter anderem, dass Teilchen und Antiteilchen die gleiche Masse haben.

Diskrete und kontinuierliche Symmetrien

C, P und T sind diskrete Symmetrien, während Rotationen, Boosts und Translationen durch kontinuierliche Parameter parameterisiert werden.

Sophus Lie
(1842–1899)

Die Drehgruppe, die Lorentz-Gruppe und die Poincaré-Gruppe sind Beispiele für **Lie-Gruppen**, d.h. Gruppen, die zugleich in einer mit der Gruppenstruktur kompatiblen Weise Mannigfaltigkeiten sind, d.h. dass die Multiplikation und das Inverse unendlich oft stetig differenzierbar sind.

Ausgehend von infinitesimalen Transformationen können Lie-Gruppen durch ihre **Lie-Algebren** beschrieben werden.

Symmetrien und Erhaltungssätze

Emmy Noether
(1882–1935)

Noether-Theorem: Jeder Symmetrie entspricht eine Erhaltungsgröße.

Für kontinuierliche Symmetrien folgt dies für $f(q) = q + \epsilon\,\delta q$ aus

$$\begin{aligned} L(q,\dot q) &= L(q+\epsilon\,\delta q, \dot q + \epsilon\,\delta \dot q) \\ &= L(q,\dot q) + \epsilon \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta \dot q\right)}_{=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta \dot q\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\right) \end{aligned}$$

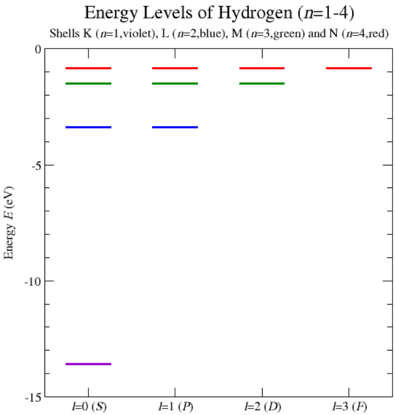
Emmy Noether
(1882–1935)

Noether-Theorem: Jeder Symmetrie entspricht eine Erhaltungsgröße.

Beispielsweise entspricht
Zeittranslationsinvarianz Energieerhaltung,
Translationsinvarianz Impulserhaltung,
Rotationsinvarianz Drehimpulserhaltung.

Symmetrien und quantenmechanische Entartung

In der Quantenmechanik entspricht einer Symmetrie eine Entartung von Zuständen, da aus $[\hat{H}, \hat{Q}] = 0$ für $\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$ auch $\hat{H}\left(\hat{Q}\,|\psi\rangle\right) = E\left(\hat{Q}\,|\psi\rangle\right)$ folgt.



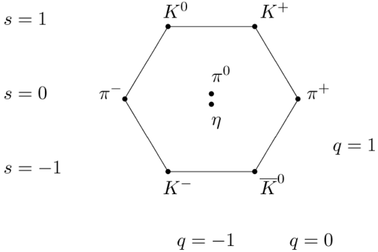
Z.B. entspricht die "zufällige" Entartung des Wasserstoff-Atoms bezüglich der Drehimpuls-Quantenzahl ℓ der Erhaltung des (Laplace-)Runge-Lentz(-Pauli)-Vektors

$$\boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}}{\mu} - \frac{e^2 \boldsymbol{r}}{r}$$

Symmetrie und die Entdeckung der Quarks

Umgekehrt entspricht einer Entartung eine Symmetrie und eine Erhaltungsgröße, so auch der nahezu entarteten Masse von Proton und Neutro der Isobaren-Spin (**Isospin**), der Rotationen in einem abstrakten Raum erzeugt, als eine ungefähre Symmetrie.

Dieser erklärt auch, warum die geladenen und neutralen Pionen fast entartet sind: diese bilden ein $I = 1$ Isospin-Triplet.



Mit der Entdeckung der sogenannten “seltsamen” Teilchen $K^\pm, K^0, \ldots$ kam es dann zu einer Proliferation von Zuständen mit nahezu entarteten Massen, die sich nicht durch den Isospin alleine erklären liessen.

Symmetrie und die Entdeckung der Quarks

Gell-Mann zeigte 1964, dass sich diese erklären liessen, wenn man den Isospin und die “Seltsamkeit” zu einer größeren $\mathrm{SU}(3)$ Symmetrie vereinigt, die von drei **Quarks** u, d und s als Bausteinen ausgeht.

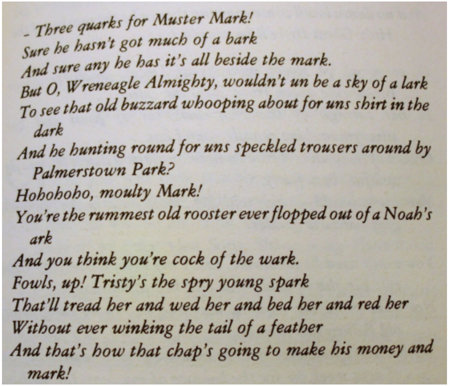
Murray Gell-Mann
(1929–)

A simpler and more elegant scheme can be constructed if we allow non-integral values for the charges. We can dispense entirely with the basic baryon b if we assign to the triplet t the following properties: spin $\frac{1}{2}$, $z = -\frac{1}{3}$, and baryon number $\frac{1}{3}$. We then refer to the members $u^{\frac{2}{3}}$, $d^{-\frac{1}{3}}$, and $s^{-\frac{1}{3}}$ of the triplet as "quarks" 6) q and the members of the anti-triplet as anti-quarks $\bar{q}$. Baryons can now be constructed from quarks by using the combinations $(q\,q\,q)$, $(q\,q\,q\,q\,\bar{q})$, etc., while mesons are made out of $(q\,\bar{q})$, $(q\,q\,\bar{q}\,\bar{q})$, etc. It is assuming that the lowest baryon configuration $(q\,q\,q)$ gives just the representations **1**, **8**, and **10** that have been observed, while the lowest meson configuration $(q\,\bar{q})$ similarly gives just **1** and **8**.

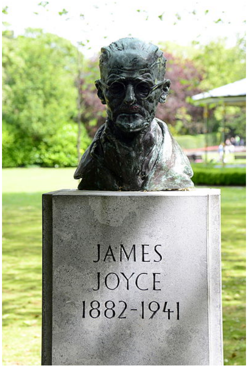
6) James Joyce, Finnegan's Wake (Viking Press, New York, 1939) p.383.

Symmetrie und die Entdeckung der Quarks

Gell-Mann zeigte 1964, dass sich diese erklären liessen, wenn man den Isospin und die "Seltsamkeit" zu einer größeren $\mathrm{SU}(3)$ Symmetrie vereinigt, die von drei **Quarks** u, d und s als Bausteinen ausgeht.

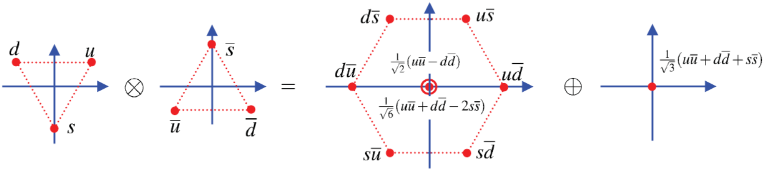


– Three quarks for Muster Mark!
Sure he hasn't got much of a bark
And sure any he has it's all beside the mark.
But O, Wreneagle Almighty, wouldn't un be a sky of a lark
To see that old buzzard whooping about for uns shirt in the dark
And he hunting round for uns speckled trousers around by Palmerstown Park?
Hohohoho, moulty Mark!
You're the rummest old rooster ever flopped out of a Noah's ark
And you think you're cock of the wark.
Fowls, up! Tristy's the spry young spark
That'll tread her and wed her and bed her and red her
Without ever winking the tail of a feather
And that's how that chap's going to make his money and mark!



Symmetrie und die Entdeckung der Quarks

Gell-Mann zeigte 1964, dass sich diese erklären liessen, wenn man den Isospin und die “Seltsamkeit” zu einer größeren $\mathrm{SU}(3)$ Symmetrie vereinigt, die von drei **Quarks** u, d und s als Bausteinen ausgeht.

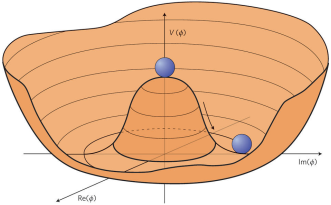


Die Regeln dieses “Achtfachen Wegs” können als eine Verallgemeinerung der Addition von Drehimplulsen aufgefasst werden und sind ein Beispiel für die Anwendung der **Darstellungstheorie** in der Physik.

Spontane Symmetriebrechung

Von großer Bedeutung in der Physik ist der Fall, dass der Zustand niedrigster Energie nicht die volle Symmetrie der Lagrange-Funktion hat. In diesem Fall wird die Symmetrie **spontan gebrochen**.

In der klassischen Mechanik ist ein Beispiel durch ein Teilchen in einem "Champagnerflaschenboden"-Potential gegeben.



Ein Beispiel aus der statistischen Physik ist der Ferromagnetismus, in dem oberhalb der Curie-Temperatur trotz der Rotationsinvarianz der Hamilton-Funktion die Isotropie durch die spontane Magnetisierung gebrochen wird.

Gebrochene Symmetrien und masselose Teilchen

Goldstone-Theorem: In einer Quantenfeldtheorie entspricht jeder spontan gebrochenen Symmetrie ein masseloses Teilchen als (Nambu-)Goldstone-Boson.

Jeffrey Goldstone
(1933–)

Beispielsweise bricht für masselose Quarks die starke Wechselwirkung die chirale Symmetrie $\mathrm{SU}(N_f)_L \times \mathrm{SU}(N_f)_R \to \mathrm{SU}(N_f)_V$. Den $(N_f^2 - 1)$ gebrochenen Generatoren entsprechen pseudoskalare Goldstone-Bosonen.

In der realen Welt sind die up- und down-Quarks sehr leicht, aber nicht masselos. Entsprechend sind die Pionen als Pseudo-Goldstone-Bosonen sehr leicht, aber nicht exakt masselos (**Chirale Störungstheorie**).

Lokale Symmetrien

Eine besonders wichtige Form von Symmetrien in der Feldtheorie sind lokale Symmetrien (**Eichsymmetrien**), bei denen die Felder an verschiedenen Raumzeitpunkten unabhängig voneinander transformiert werden können.

Globale Symmetrie: $\phi(x) \mapsto f(\phi(x))$
Lokale Symmetrie: $\phi(x) \mapsto f(x, \phi(x))$

Ein Beispiel ist die klassische Elektrodynamik, in der die Maxwell-Gleichungen unter Eichtransformationen $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$ invariant sind.

Lokale Symmetrien und Eichtheorien

Eichsymmetrien schränken die mögliche Form einer Feldtheorie sehr stark ein: es muss ein Eichpotential A_μ geben, dass in der Kombination $\partial_\mu + A_\mu$ auftreten muss, um die Ortsabhängigkeit der Eichtransformationen der Felder durch sein eigenes Transformationsverhalten aufzufangen.

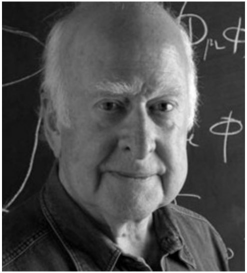
Damit legt die Eichsymmetrie die Form der Wechselwirkung eindeutig fest.

Die Quanten des Eichpotentials sind notwendigerweise masselose **Eichbosonen** mit Spin 1.

Beispiel für **Eichtheorien** sind die QED mit Eichgruppe $\mathrm{U}(1)$ mit dem Photon als Eichboson und die QCD mit Eichgruppe $\mathrm{SU}(3)$ mit den Gluonen als Eichbosonen.

Spontane Brechung lokaler Symmetrien – Higgs-Effekt

Higgs-Effekt: Bei der spontanen Brechung einer Eichsymmetrie treten keine Goldstone-Bosonen auf, stattdessen werden die Eichbosonen massiv.



Peter Higgs
(1929–)

Beispielsweise werden durch die spontane Brechung der elektroschwachen Symmetrie $\mathrm{SU}(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_Q$ die Eichbosonen $W^\pm$, Z^0 massiv, während das Photon, das der ungebrochenen Eichsymmetrie $U(1)_Q$ entspricht, masselos bleibt.

Das Higgs-Boson ist das Quantum des verbleibenden Freiheitsgrades des Higgs-Feldes, dessen nichtverschwindender Erwartungswert die Symmetrie bricht.

Anomale Symmetrien

Unter bestimmten Umständen überlebt eine Symmetrie einer klassischen Feldtheorie die Quantisierung nicht. Man spricht dann von einer **Anomalie** ($<$ gr. ἀ- “un-, nicht-”, νόμος “Gesetz”).

Beispielsweise ist die gobale axiale Symmetrie $\mathrm{U}(1)_A$ in QCD und QED anomal, was den Zerfall $\pi^0 \to \gamma\gamma$ ermöglicht (und es erlaubt, die Zerfallsrate vorherzusagen).

Eine Anomalie in einer Eichsymmetrie führt hingegen zu Inkonsistenzen. Damit sich im Standardmodell alle möglichen Eich-Anomalien gegenseitig aufheben, müssen die Quarks drittelzahlige Anteile der Elektronladung tragen, wodurch die Gleichheit von Proton- und Elektron-Ladung (und damit die Neutralität der Atome) garantiert wird.

Übersicht über Symmetrietypen

	global	lokal
exakt	Erhaltungsgrößen, Entartungen	masselose Eichbosonen
spontan gebrochen	masselose Goldstone-Bosonen	massive Vektorbosonen
anomal	div. Effekte	(*inkonsistent*)