Übungsblatt 1

Symmetrien in der Physik
im Wintersemester 2017/18

Dozent: PD Dr. G. von Hippel

1. *Gruppen und ihre Eigenschaften* (10 P.)

   Welche der folgenden Strukturen sind jeweils Gruppen? Welche der Gruppen sind abelsch? Welche der Gruppen sind endlich, und was ist jeweils deren Ordnung?

   1. $\mathbb{R}$ mit der Addition als Verknüpfung
   2. $\mathbb{R}$ mit der Multiplikation als Verknüpfung
   3. $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit der Multiplikation als Verknüpfung
   4. $(0;\infty)$ mit der Multiplikation als Verknüpfung
   5. $\{0,1\}$ mit der Multiplikation als Verknüpfung
   6. $\{1,-1\}$ mit der Multiplikation als Verknüpfung
   7. $\{0,\ldots,k-1\}$ mit der Addition modulo k als Verknüpfung
   8. $\{\mathrm{e}^{2\pi ik/n}|k=0,\ldots n-1\}$ mit der Multiplikation als Verknüpfung
   9. $\mathbb{R}^3$ mit der Vektoraddition als Verknüpfung
   10. $\mathbb{R}^3$ mit dem Vektorprodukt als Verknüpfung
   11. $\{M\in\mathbb{R}^{n\times n}|\det(M)=0\}$ mit der Matrixmultiplikation als Verküpfung
   12. $\{M\in\mathbb{R}^{n\times n}|\det(M)=1\}$ mit der Matrixmultiplikation als Verküpfung
   13. $\{M\in\mathbb{R}^{n\times n}|\det(M)\neq 0\}$ mit der Matrixmultiplikation als Verküpfung
   14. $\{M\in\mathbb{R}^{n\times n}|M^t=M\}$ mit der Matrixmultiplikation als Verküpfung
   15. $\{M\in\mathbb{R}^{n\times n}|M^t=M^{-1}\}$ mit der Matrixmultiplikation als Verküpfung

2. *Folgerungen aus den Gruppenaxiomen* (10 P.)

   1. Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e. Zeigen Sie jeweils ausgehend von den Gruppenaxiomen:
      (a) $\forall a\in G\ ae=a$
      (b) $\forall a\in G\ aa^{-1}=e$
      (c) $\forall a,b\in G\ (ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$
   2. Zeigen Sie ausgehend von den Gruppenaxiomen, dass aus der Existenz des Einselements auch dessen Eindeutigkeit folgt.
   3. Zeigen Sie in gleicher Weise die Eindeutigkeit des inversen Elements.

3. *Gruppentafeln kleiner endlicher Gruppen* (10 P.)

    1. Zeigen Sie ausgehend von den Gruppenaxiomen, dass die Gruppentafel einer endlichen Gruppe ein sogenanntes *lateinisches Quadrat* sein muss, in dem jedes Element in jeder Zeile und Spalte genau einmal vorkommt.
    2. Schreiben Sie für $n = 1, 2, 3, 4$ jeweils die Gruppentafeln aller Gruppen der Ordnung n auf und zeigen Sie, dass Ihre Liste vollständig ist.